Министерство образования и науки Республики Казахстан

ЮЖНО-КАЗАХСТАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

ИМ. М. АУЭЗОВА

УДК 517.927.25

№ госрегистрации 0118РК00448

Инв.№

УТВЕРЖДАЮ

Проректор по НИР и МС

ЮКГУ им. М. Ауэзова  
 \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_М.И. Сатаев  
 «\_\_\_»\_\_\_\_\_\_\_\_\_ 2018 г.

ОТЧЕТ   
О НАУЧНО-ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКОЙ РАБОТЕ

по теме:

AP05131225 БАЗИСНЫЕ СВОЙСТВА СОБСТВЕННЫХ ВЕКТОРОВ ОДНОМЕРНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ С ИНВОЛЮЦИЕЙ

(промежуточный)

Научный руководитель Әбдіжаһан М. Сәрсенбі  
доктор физ.-мат. наук, гнс \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_

Шымкент 2018

СПИСОК ИСПОЛНИТЕЛЕЙ

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Руководитель темы, доктор физ.-мат.наук, ГНС | \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ подпись, дата | Әбдіжаһан М. Сәрсенбі (все подразделы) |
| Исполнители темы  Ведущий научный сотрудник, к.ф.-м.н. | \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ подпись, дата | Л.В. Крицков (подраздел 1, 3 ) |
| Младший научный сотрудник | \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ подпись, дата | Ә.Ә. Сәрсенбі ( подразделы 1.1,1.2 ) |
| Нормоконтроль | \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ подпись, дата | А.А. Кынатова |

РЕФЕРАТ

Есeп 52 б., 28 әдебиет, 2 қосымша.

МЕНШІКТІ ФУНКЦИЯ, РИСС БАЗИСІ, БИОРТОГОНАЛДЫ ЖІКТЕУЛЕР, ИНВОЛЮЦИЯСЫ БАР ДИФФЕРЕНЦИАЛДЫ ТЕҢДЕУЛЕР

Зерттеу нысаны ретінде инволюциясы бар екіншіі ретті дифференциалды операторлар үшін спектралдық есептер қарастырылған.

Жұмыстың мақсаты – инволюциясы бар екінші ретті дифференциалды операторлардың меншікті функциялар жүйесінің базистік қасиеттерін зерттеу.

Зерттеу әдістері – дифференциалды теңдеулер теориясының аналитикалық тәсілдері, гильберт кеңістігіндегі сызықты операторлардың абстрактілі теориясының, дифференциалды операторлар теориясының, функционалды анализдің, сандар теориясының тәсілдері. Алынған нәтижелер. Шеттік шарттары Дирихле түрінде болатын айнымалы коэффициенті бар жартылай шенелген инволюциясы бар екінші ретті дифференциалды операторлардың меншікті функциялар жүйесінің базис болатындығы туралы теоремалар. Инволюциясы бар параболалық, гиперболалық және эллипстік түрдегі теңдеулер үшін аралас есептердің шешімділігі көрсетілген. Инволюциясы бар параболалық түрдегі кейбір дербес туындылы теңдеулер үшін аралас есептің корректілі емес болатындығы дәлелденген. Қосымша алынған функциялар саны шексіз көп болатын инволюциясы бар екінші ретті дифференциалды оператор мысалы құрастырылып, оның түпкілікті векторлар жүйесінің базис болатындығы анықталған.

Зерттеу нәтижелері өз өзіне түйіндес емес дифференциалды операторлардың спектралды теориясында, инволюциясы бар дербес туындылы дифференциалды теңдеулер теориясында, әрқилы қолданбалы есептерде жүзеге асырылуы мүмкін.

РЕФЕРАТ

Отчет 52 с., 28 источников, 2 прил.

СОБСТВЕННАЯ ФУНКЦИЯ, БАЗИС РИССА, БИОРТОГОНАЛЬНЫЕ РАЗЛОЖЕНИЯ, ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ С ИНВОЛЮЦИЕЙ

Объектом исследования являются спектральные задачи для дифференциальных операторов второго порядка с инволюцией.

Цель работы – исследование базисных свойств дифференциальных операторов второго порядка с инволюцией.

В исследованиях использованы аналитические методы теории дифференциальных уравнений, методы абстрактной теории линейных операторов и теории линейных дифференциальных операторов в гильбертовом пространстве, методы функционального анализа, теории чисел.

Полученные результаты. Доказаны теоремы о базисности собственных функций полуограниченных дифференциальных операторов второго порядка с инволюцией при краевых условиях типа Дирихле. Показаны разрешимость смешанных задач для уравнений параболического, гиперболического и эллиптического типов с инволюцией. Установлена некорректность смешанных задач для некоторых уравнений параболического вида с инволюцией. Построен пример дифференциального оператора второго порядка с инволюцией с бесконечным числом присоединенных функций, доказана теорема о базисности систем корневых функций.

Результаты исследований могут быть использованы в спектральной теории несамосопряженных дифференциальных операторов, в теории дифференциальных уравнений в частных производных с инволюцией, а также в различных прикладных задачах.

|  |
| --- |
| СОДЕРЖАНИЕ |
|  |
| |  | | --- | | ОСНОВНАЯ ЧАСТЬ ………………………………………………………………….. 8 | | |  |  |  |  |  | | --- | --- | --- | --- | --- | | 1 | Базисные свойства собственных функций дифференциальных операторов второго порядка с инволюцией ................................................ | | | 8 | | 1.1  1.1.1  1.1.2  1.1.3  1.1.4  1.1.5  1.1.6  1.1.7  1.2  1.2.1  1.2.2  1.2.3  1.2.4  1.3 | Базисность собственных функций полуограниченного дифференциального оператора второго порядка с инволюцией с краевыми условиями Дирихле и их применение в вопросах разрешимости смешанных задач для параболического, гиперболического и эллиптического уравнений, возмущенных инволюцией ………………..  Функция Грина краевой задачи с инволюцией ……………………………  Собственные функции спектральной задачи с постоянными коэффициентами ……………………………………………………………..  Оценка функции Грина ……………………………………………………...  Теоремы о равносходимости и базисности собственных функций спектральной задачи с переменными коэффициентами …………………….  Положительность собственных значений спектральной задачи ………..  Абсолютная и равномерная сходимость ряда Фурье по собственным функциям спектральной задачи …………………………………………….  Существование и единственность решения смешанной задачи (1), (2) ….  Базисность в  собственных функций дифференциального оператора порядка с инволюцией и их применение в вопросах разрешимости некорректных задач ………………………………………………………………..  Некорректность смешанной задачи (1), (2) …………………………………..  Классы разрешимости смешанной задачи (1), (2) ……………………………….  Базисность собственных функций ………………………………………………….  Смешанная задача для уравнения с переменным коэффициентом ……………….  Спектральная задача с бесконечным числом присоединенных функций ……  ЗАКЛЮЧЕНИЕ……………………………………………………………….  СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ…………………………  ПРИЛОЖЕНИЕ А……………………………………………………………..  ПРИЛОЖЕНИЕ B ……………………………………………………………. | | | 8  9  12  14  15  22  23  25  28  29  30  33  38  38  42  44  46  48 | |  | |  | |  | |  | | |

ВВЕДЕНИЕ

Цель работы – исследование базисных свойств систем собственных функций спектральной задачи для одномерного дифференциального оператора второго порядка с инволюцией и с переменным коэффициентом с краевыми условиями Дирихле.

Задачи исследований:

- показать, что собственные значения изучаемой спектральной задачи с краевыми условиями типа Дирихле положительны;

- построить функции Грина краевых задач рассматриваемого типа с нулевым потенциалом с краевыми условиями Дирихле;

- получить оценки норм корневых функций и их производных;

- показать, что собственные функции спектральной задачи с краевыми условиями типа Дирихле образуют базис пространства .

Исследования по данному проекту проводились согласно календарному плану в заявке на участие в конкурсе.

Запланированные на отчетный период исследования полностью завершены. По результатам исследований в рамках проекта опубликованы 15 работ. Из них 2 работы в журналах с импакт-фактором и 4 работы в изданиях, входящих в базу Thomson Reuters, 2 работы в отечественных журналах, 7 работ в тезисах докладов международных конференций. Список основных опубликованных работ по результатам настоящего проекта приведены в приложении А. Приложение В содержит календарный план выполнения заданий проекта.

Основными результатами исследований по данному проекту являются:

1) создание теории функции Грина одномерного дифференциального оператора второго порядка с инволюцией c краевыми условиями Дирихле;

2) построена функция Грина одномерного дифференциального оператора второго порядка с инволюцией c краевыми условиями Дирихле;

3) теоремы о базисности и безусловной базисности в пространстве  собственных функций и равносходимости разложений произвольной функции из класса  по собственным функциям одномерных дифференциальных операторов второго порядка с инволюцией с краевыми условиями Дирихле;

4) равномерная сходимость разложений по собственным функциям одномерных дифференциальных операторов второго порядка с инволюцией с краевыми условиями Дирихле;

5) теоремы о существовании и единственности решений смешанных задач для уравнений параболического, гиперболического и эллиптического типов с инволюцией в случае краевых условий типа Дирихле.

Отчет состоит из одного раздела и трех подразделов. В первом подразделе излагаются теория функции Грина одномерных дифференциальных операторов второго порядка с инволюцией с краевыми условиями Дирихле, основные результаты о равносходимости, базисности и безусловной базисности собственных функций дифференциального оператора второго порядка с инволюцией с краевыми условиями Дирихле. Приведены результаты исследований о разрешимости смешанных задач для уравнения параболического типа с инволюцией с краевыми условиями типа Дирихле. Доказаны теоремы о существовании и единственности решения перечисленных задач методом Фурье. Во втором подразделе доказана базисность собственных функций неполуграниченного несамосопряженного дифференциального оператора второго порядка с инволюцией. Показана некорректность смешанной задачи для уравнения параболического вида с инволюцией. Установлены классы корректности задач в терминах начальных функций. В третьем подразделе построен пример дифференциального оператора второго порядка с инволюцией с бесконечным числом присоединенных функций. Проведен полный спектральный анализ задачи. Доказана теорема о базисности корневых функций спектральной задачи.

ОСНОВНАЯ ЧАСТЬ

1 Базисные свойства собственных функций дифференциальных операторов второго порядка с инволюцией

1.1 Базисность собственных функций полуограниченного дифференциального оператора второго порядка с инволюцией с краевыми условиями Дирихле и их применение в вопросах разрешимости смешанных задач для параболического, гиперболического и эллиптического уравнений, возмущенных инволюцией

Этот подраздел посвящен исследованию спектральных свойств дифференциальных операторов второго порядка с инволюцией. Важное место в спектральной теории дифференциальных операторов занимает вопрос базисности собственных функций. Решение вопроса базисности собственных функций позволяет использовать метод Фурье при решений различных задач для уравнений в частных производных. Метод Фурье использован в работах [1, 2] при изучений обратных задач для дифференциальных уравнений в с инволюцией, в работе [3] при исследовании поведения решений уравнения в частных производных с инволюцией. Теории функции Грина дифференциальных уравнений с инволюцией посвящены работы [4,5]. Исследованию спектральных свойств дифференциальных операторов с инволюцией посвящены работы [6-18]. Вопросы разрешимости задач для дифференциальных уравнений в частных производных с инволюцией рассмотрены в работах [19 - 21].

В настоящей работе дано обоснование метода Фурье решения смешанной задачи для уравнения параболического вида с инволюцией. Решению этого вопроса в случае классических уравнений посвящены работы В.А. Стеклова [22], В.А. Ильина [23]. Дальнейшее развитие метода Фурье, связанное с понижением требований гладкости начальных данных, имеется в работах В.А. Чернятина [24], А.П. Хромова [25].

В области  рассматривается смешанная задача для уравнения параболического вида





Уравнение (1) содержит преобразование инволюции. Параметр  удовлетворяет условию , функция  непрерывна на отрезке . Если система собственных функций спектральной задачи

 (3)

то ряд

 (4)

является формальным решением смешанной задачи (1), (2). Выполнение условия



требует решения вопроса разложения начальной функции в ряд по собственным функциям.

1.1.1 Функция Грина краевой задачи с инволюцией

Рассмотрим краевую задачу

 (5)

Функции

,

являются линейно независимыми решениями однородного уравнения (5).

Функцией Грина краевой задачи (5) назовем такую функцию , что функция



является решением краевой задачи

, (6)

где - непрерывная функция. Справедлива следующая

Теорема 1. Если λ не является собственным значением однородной краевой задачи (5), то краевая задача (6) разрешима для любой непрерывной функции  и ее решение представимо в виде



где



Доказательство теоремы проводится непосредственной проверкой. Так как функции ,  линейно независимые решения однородного уравнения (5), то достаточно показать, что функция









удовлетворяет неоднородной краевой задаче (6). Вычислим производной этой функции







Вторая производная









при подстановке в уравнение (6) превращает его в тождество. Выполнение краевых условий проверяется простым вычислением. Теорема доказана.

Из теоремы 1 вытекает

Следствиe. Функция Грина краевой задачи (5) имеет вид



1.1.2 Собственные функции спектральной задачи с постоянными коэффициентами

В работе [14] исследована спектральная задача (5), которая имеет две серии собственных значений

.

Было установлено, что система собственных функций вида



образует ортонормированный базис пространства .

С помощью выписанной функции Грина можно написать, разложение произвольной функции  из класса по собственным функциям спектральной задачи (5).

Полюсами функции Грина служат нули функций .

Заметим, что если если число  не является четным, то все собственные значения однократны.

В комплексной плоскости рассмотрим окружности

 c общим центром в начале координат:



Эти окружности не пересекаются и не проходят через точки  и При окружности  соответственно переходят в окружности  в  плоскости.

Для любой функции  частичные суммы разложения по собственным функциям спектральной задачи (1) можно записать в виде [3]





Далее меняем порядок интегрирования и для вычисления интеграла по окружности  используем теорему о вычетах.



Таким образом, частичные суммы разложения по собственным функциям спектральной задачи (5) произвольной суммируемой функции имеют вид

, (7)

где

 .

Система  является полной ортонормированной системой в. Поэтому для  частичные суммы  вида (7) сходятся к функции  в смысле нормы пространства

1.1.3 Оценка функции Грина**.**

В дальнейшем нам понадобится оценка функции Грина. Пусть , шар достаточно малого радиуса .

Лемма 1. Если  и , то для функции Грина  краевой задачи (1) справедлива следующая равномерная оценка



при , где

.

Доказательство. При  функцию Грина можно преобразовать к виду



Так как , то , . Поэтому



если  и



если .

Таким образом, при  функция Грина удовлетворяет следующей оценке



В случае  аналогичным образом получаем оценку в виде



В случае  имеем оценку вида



Полученные оценки можно написать общем виде



Лемма доказана.

1.1.4 Теоремы о равносходимости и базисности собственных функций спектральной задачи с переменными коэффициентами

Нас интересует вопрос о возможности разложения произвольной функции  в сходящийся ряд по собственным функциям спектральной задачи (3), с непрерывным комплекснозначным коэффициентомна интервале .

Обозначим через  функцию Грина задачи (3), а через  функцию Грина задачи (5). Так как, почти всюду на интервале (-1,1)





то



Функция  удовлетворяет краевым условиям (3). Поэтому вне полюсов функций и имеет место представление

 (8)

Справедлива следующая

Теорема 2. Если число  не является четным, то для всех достаточно больших  решение интегрального уравнения (8) cуществует.

Доказательство. Применяем метод итерации. Пусть  и

 (9)

для всех достаточно больших .

В силу доказанной леммы для функции Грина  краевой задачи (5) имеет место оценка

,

где



Соотношение (9) при  дает оценку



Для дальнейших выкладок введем следующие обозначения



 (10)

где максимум по , для фиксированного  и для достаточно больших , лежащих вне полюса функции . Нам нужно показать справедливость оценки

 (11)

Для  оценка (11) следует из первого неравенства в (10). Предположим справедливость оценки (11) при  и докажем, что оценка(11) верна и при . Тогда из второго неравенства (10) выводим неравенство

 (12)

Распишем соотношение





По неравенству треугольника имеем



Неравенство



влечет оценку



а также, соотношение



влечет неравенство



Кроме того



Поэтому мы можем написать неравенство



Это неравенство вместе с неравенством (12) приводит к оценке



Для достаточно больших  можно считать

.

Следовательно, верна оценка



для любого , откуда следует справедливость оценки (11). Из доказанной оценки следует равномерная сходимость ряда



и последовательности его частичных сумм

.

Это означает равномерную сходимость последовательности  к предельной функции , которая удовлетворяет интегральному уравнению (8). Теорема доказана.

Пусть 

частичные суммы разложения по собственным функциям спектральной задачи (5), где .Частичные суммы разложения по собственным функциям спектральной задачи (3) обозначим через



Последовательность  назовем равносходящимся с последовательностью на промежутке если  равномерно на этом промежутке при 

Сформулируем теорему о равносходимости.

Теорема 3. Если число  не является четным, то для любой функции  последовательность  равносходится с последовательностью 

Доказательство. Рассмотрим разность частичных сумм разложений по собственным по собственным функциям спектральных задач (3) и (5)

 (13)

Из доказательства предыдущей теоремы следует, что



Применяя эту оценку из равенства (8) получаем



Тогда из равенства (13) получаем следующее неравенство





Если ввести обозначение

,

то будем иметь



Разобьем рассматриваемый интервал на две части , где





 достаточно малое число. Теперь мы можем переписать последнее неравенство в виде



(14)



Поскольку

,

то второе слагаемое в правой части (14) можно сделать меньшим чем  путем выбора числа . Обозначим через  радиус круга  . Тогда из равенства





получим неравенство



Выбирая номер  достаточно большим, можно сделать первое слагаемое в (14)меньше чем . Теорема доказана.

Из доказанной теоремы немедленно следует базисность собственных функций спектральной задачи (3). Этот факт сформулируем в виде теоремы.

Теорема 4. Если число  не является четным, то система собственных функций спектральной задачи (3) образует базис пространства .

Доказательство. Пусть  норма элемента пространства . Тогда для любой функции 

.

Первое слагаемое меньше  в силу базисности собственных функций спектральной задачи (5), а второе слагаемое меньше  в силу теоремы 3 о равносходимости. Теорема 4 доказана..

Теперь сформулируем теорему о базисности собственных функций в самосопряженном случае.

Теорема 5. Если число  не является четным и коэффициент  уравнения (3) вещественная функция, то система собственных функций спектральной задачи (3) образует ортонормированный базис пространства .

Теорема 5 следует из самосопряженности спектральной задачи (3) при вещественном  и теоремы 4.

Доказанная теорема 4 утверждает базисность собственных функций спектральной задачи (3). При этом остается неясным вопрос о виде этого базиса: будет ли данный базис безусловным базисом или базисом Рисса? По этому поводу мы можем утверждать следующее.

Теорема 6. Если число  не является четным, то всякий базис из собственных функций спектральной задачи (3) образует безусловный базис пространства .

Для доказательства заметим, что если выполнено условие теоремы, т.е. если система  собственных функций спектральной задачи (3) образует базис пространства , то всегда выполнена равномерная оценка

, (15)

где  - система, биортогонально сопряженная к системе , состоящая из собственных функций спектральной задачи, сопряженной к (3). А из работы Л.В. Крицкова и А.М. Сарсенби [26] известно, что в условиях спектральной задачи (3) условие (15) является необходимым и достаточным для безусловной базисности собственных функций спектральной задачи (3). Тем самым теорема 6 доказана.

1.1.5 Положительность собственных значений спектральной задачи

Теорема 6. Если функция  на промежутке , то все собственные значения  спектральной задачи (3) положительны.

Доказательство. Умножим обе части уравнения



на  и полученное равенство проинтегрируем по промежутку . Тогда



Допустим, что все . Из последнего равенства получим неравенство

 .

К правой части применим неравенство . Тогда

.

Так как , то полученное противоречие доказывает теорему. Теорема 6 доказана.

1.1.6 Абсолютная и равномерная сходимость ряда Фурье по собственным функциям спектральной задачи

Теорема 7. Если число  не является четным и коэффициент  уравнения (3) вещественная функция, то для любой дважды дифференцируемой функции , удовлетворяющей условиям , ряд Фурье

 (9)

по полной ортонормированной системе  собственных функций спектральной задачи (3) сходится абсолютно и равномерно.

Доказательство. По условию задачи (1), функция  имеет производную второго порядка и удовлетворяет условиям . Перепишем уравнение (3) в виде

 .

Тогда коэффициенты  в разложении (9) можно преобразовать

 

Отсюда получим соотношение , где

.

Таким образом, ряд (9) можем записать в виде

 (10)

С другой стороны, хорошо известно, что краевая задача (3) эквивалентна интегральному уравнению



где  - функция Грина краевой задачи (3) при , которая является непрерывной при , и, следовательно, ограниченной функцией. Обозначим

. Тогда ряд (10) можно записать так

.

Так как , то

.

Величины  являются коэффициентами Фурье разложения по полной ортонормированной системе . Поэтому оба ряда в правой части последнего соотношения сходятся, причем второй ряд сходится при всех из данного промежутка и



в силу непрерывности и ограниченности функции Грина . Тем самым, из неравенства (10) вытекает утверждение теоремы.

1.1.7 Существование и единственность решения смешанной задачи (1), (2)

Полученные выше результаты позволяют показать существование и единственность решения смешанной задачи (1), (2).

Теорема 8. Пусть выполнены следующие условия:

1) вещественная непрерывная функция  неотрицательна;

2) число  не является четным, ,

Тогда для любой дважды дифференцируемой функции , удовлетворяющей условиям , решение смешанной задачи (1), (2) существует, единственно и представимо в виде ряда (4).

Доказательство. Для доказательства теоремы достаточно показать равномерную сходимость ряда (4) и рядов

,  (11)

. (12)

По теореме 6 все числа  положительны. Поэтому  для любого  и . По теореме 7 ряд  сходится равномерно. Значит ряд (4) абсолютно и равномерно сходится. Далее, из , начиная с некоторого , следует равномерная сходимость ряда (11). Ряд (12) преобразуем следующим образом

 (13)

Ряды в правой части (13) сходятся абсолютно и равномерно при . Ряд в левой части (13) также сходится абсолютно и равномерно при . Отсюда следует абсолютная и равномерная сходимость ряда

 (14)

Ряд (14) умножим на число  и прибавим к ряду (13). Полученный ряд



также сходится абсолютно и равномерно при . Таким образом, ряды (4), (11), (12) сходятся абсолютно и равномерно при . Доказанное означает, что функция (4) удовлетворяет уравнению (1) и условиям (2).

Докажем единственность решения. Пусть существуют два решения  и  смешанной задачи (1) и (1). Тогда функция  удовлетворяет уравнению (1) и начальному условию



Умножив обе части уравнения (1) на функцию , проинтегрируем по переменной 





Полученное равенство проинтегрируем по переменной . Тогда получим





Применяя неравенство  и пользуясь не отрицательностью функции  и соотношением  мы получим неравенство

,

из которого следует . Теорема 8 доказана.

Теорема 8 без особого труда переносится на случай уравнений гиперболического и эллиптического видов с инволюцией. Например, для уравнения гиперболического вида можно рассмотреть следующую смешанную задачу. В области  рассматривается смешанная задача для уравнения гиперболического вида





Вышеизложенные результаты служат обоснованием для применения метода Фурье для этой смешанной задачи.

1.2 Базисность в  собственных функций дифференциального оператора порядка с инволюцией и их применение в вопросах разрешимости некорректных задач

В настоящем подразделе будет изучен вопрос разрешимости следующей задачи:

 (1)

 (2)

Преобразование  функции  из класса  называют инволюцией, если . В частности, преобразование вида  является инволюцией. Уравнение (1) мы называем уравнением параболического вида с инволюцией. Данное название не имеет ничего общего с известной классификацией уравнений математической физики.

Необходимым условием существования решения задачи (1), (2) является согласованность начальных данных с уравнением (1) и краевыми условиями (2). Поэтому мы будем требовать, что  и 

Будем говорить, что задача (1), (2) поставлена корректно, если 1) решение задачи существует, 2) решение задачи единственно, 3) решение задачи непрерывно зависит от начальных данных (устойчиво).

Применение метода Фурье к задаче (1), (2) приводит к несамоспряженной спектральной задаче с инволюцией

 . (3)

Сопряженная спектральная задача имеет вид

 (3\*)

В подразделе построена функция Грина краевой задачи (3). Получены оценки построенной функции Грина. Доказана базисность собственных функций и при наличии переменного коэффициента спектральной задачи (3). Установленные результаты использованы при исследовании некорректных задач.

Вопросам корректности смешанных задач для дифференциальных уравнений с инволюцией посвящены работы [20-21]. Смешанные задачи для уравнения вида (1) с несамосопряженными краевыми условиями, по видимому , впервые рассматриваются в данном отчете. Полученные в данном подразделе результаты без особого труда можно перенести на случаи краевых условий типа Дирихле, Неймана, периодических краевых условий.

1.2.1 Некорректность смешанной задачи (1), (2)

Известно [27] , что спектральная задача (3) несамосопряженная, имеет две серии собственных значений . Им соответствуют собственные функции  которые образуют базис Рисса в классе  [6]. Биортогонально сопряженная система состоит из собственных функций спектральной задачи (3\*) и записывается в виде [27]



Собственные функции  соответствуют собственному значению . Выписанные системы биортогональны в смысле скалярного произведения пространства :



а все остальные комбинации скалярных произведений элементов систем (4), (4\*) равны нулю.

Здесь же хотим обратить внимание на то, что спектральная задача (3) имеет бесконечное число отрицательных собственных значений, оператор двукратного дифференцирования в левой части дифференциального уравнения (3) (или оператор двукратного дифференцирования по *х* в правой части дифференциального уравнения (1)) не является полуогрниченным. В этом принципиальная разница изучаемого уравнения от многих других уравнений.

Стандартным способом выписывается формальное решение смешанной задачи (1), (2) в виде ряда

 (5) (4)

где 

Если функция  не является бесконечно дифференцируемой, т.е. если коэффициенты Фурье  функции  не убывают с достаточной быстротой, то первое слагаемое в (5) расходится, т.к. . Поэтому, в случае общих начальных данных, смешанная задача (1), (2) может не иметь решения. В случае существования решения, оно не обладает свойством устойчивости т.е. не зависит непрерывно от начальных данных. Например, возмущение



не превосходит числа  при  , но будет большим любого наперед заданного числа  для , при достаточно малых  и  и достаточно большом . Таким образом, смешанная задача (2) для уравнения параболического вида с инволюцией (1) поставлена некорректно. Тем не менее, мы покажем, что решение изучаемой смешанной задачи существует и единственно.

1.2.2 Классы разрешимости смешанной задачи (1), (2)

Прежде всего покажем единственность решения смешанной задачи.

Теорема 1. Если решение смешанной задачи (1), (2) существует, то оно единственно.

Доказательство. Пусть выполнено условие теоремы. Любое решение  задачи (1), (2), как функция от , представимо в виде ряда Фурье





по базису Рисса



Так как этот ряд сходится в смысле нормы пространства , то он сходится и в смысле скалярного произведения. Поэтому

 .

Эти два равенства запишем вкратце в виде

. (6)

Обе части уравнения (1) умножая скалярно на биортогонально сопряженную систему , получаем равенство

.

Правую часть полученного равенства два раза интегрируем по частям, а в левой части используем правило дифференцирования по параметру  под знаком интеграла. Учитывая уравнение (3\*), получим соотношение  . В полученное равенство подставим (6). В результате получим задачу Коши для обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка



Начальное условие получено из (6) при . В силу единственности решения задачи Коши,  определяются единственным образом. Этим доказывается единственность решения задачи (1), (2). Теорема 1 доказана.

Укажем классы допустимых начальных функций  для которых задача (1), (2) имеет решение.

*Теорема* 2. Если начальная функция  является полиномом по системе  вида



то решение задачи (1), (2) существует, единственно и представимо в виде



где



Доказательство. Справедливость теоремы вытекает из равенства нулю коэффициентов



в силу биортогональности систем  и . Теорема 2 доказана.

Так как множество полиномов по системе , образующей базис Рисса, всюду плотно в то из теоремы 2 вытекает

Теорема 3. Множество допустимых начальных функций в теореме 2, для которых смешанная задача (1), (2) разрешима, всюду плотно в .

1.2.3 Базисность собственных функций

Рассмотрим смешанную задачу (2) для уравнения с непрерывным коэффициентом 

 (7)

Применение метода Фурье к задаче (7), (2) приводит к спектральной задаче с инволюцией

 (8)

Функцией Грина краевой задачи (3) будем называть такую функцию , что функция



является решением краевой задачи



для любой непрерывной функции . Непосредственной проверкой можно убедиться в том, что функция Грина краевой задачи (3) имеет вид





 ,

где



С помощью функции Грина мы можем написать, разложение произвольной функции из класса по собственным функциям спектральной задачи (3).

Полюсами функции Грина (5) служат нули функции  и 





В комплексной плоскости рассмотрим окружности

с общим центром в начале координат: 

Эти окружности не пересекаются и не проходят через точки  и При окружности  соответственно переходят в окружности  в  плоскости. Внутри каждой окружности  содержится по два полюса функции Грина. Окружность  содержит один полюс.

Для выписанной функции Грина краевой задачи (3) имеет место следующий факт, который легко вытекает из явного вида функции Грина.

*Лемма*. Для функции Грина краевой задачи (3) справедлива оценка



для достаточно больших , лежащих вне малых окрестностей точек  и , где

,   - некоторая постоянная.

Для любой функции частичные суммы разложения по собственным функциям спектральной задачи (3) можно записать в виде



Далее меняем порядок интегрирования и для вычисления интеграла по окружности  используем теорему о вычетах. Тогда разложение по базису Рисса принимает вид



Обозначим через  функцию Грина задачи (8), а  есть функция Грина задачи (3). Так как почти всюду на интервале (-1,1)





то



Функция удовлетворяет несамосопряженным краевым условиям (8). Поэтому вне полюсов функций и  имеет место представление

 (9)

Справедлива следующая

*Теорема* 4. Для всех достаточно больших решение интегрального уравнения (9) cуществует.

Обозначим через



частичные суммы разложения по собственным функциям спектральной задачи (8).

Последовательность  назовем равносходящимся с последовательностью на промежутке если  равномерно на этом промежутке при 

Сформулируем теорему о равносходимости.

*Теорема* 5. Для любой функции  последовательность равносходится с последовательностью 

Доказательства теорем 4 и 5 основаны на оценке функции Грина , проводится повторением доказательства аналогичных теорем из работы [15}, так как оценки функции Грина в рассматриваемых случаях совпадают. Из теоремы 5 следует базисность в  системы собственных функций спектральной задачи (8).

*Теорема* 6. Система собственных функций спектральной задачи (8) образует базис пространства .

Доказательство. Для любой функции  рассмотрим разность

 в смысле нормы пространства . Так как

,

где в правой части первое слагаемое меньше  в силу базисности Рисса системы собственных функций спектральной задачи (3), второе слагаемое меньше  в силу теоремы 5, то

.

В силу произвольности функции , последнее неравенство означает базисность собственных функций спектральной задачи (8). Теорема 6 доказана.

1.2.4 Смешанная задача для уравнения с переменным коэффициентом

Обозначим систему собственных функций спектральной задачи (8) через , а биортогонально сопряженную ей систему .

Справедлива следующая

*Теорема* 7. Если в уравнении (7) коэффициент  непрерывная функция, начальная функция  является полиномом вида



то решение задачи (7), (2) существует, единственно и представимо в виде

.

Доказательство теоремы очевидно.

В силу плотности множества полиномов по системе, образующей базис в классе , для смешанной задачи (7), (2) справедливо утверждение теоремы 3.

1.3 Спектральная задача с бесконечным числом присоединенных функций

В данном подразделе проведен полный спектральный анализ задачи

 (1.1)

где , в которой дифференциальное выражение содержит преобразование инволюции независимой переменной в старшей производной, а краевые условия носят нелокальный характер. Показано, что если  иррационально, то система собственных функций полна и минимальна в , но не является базисом. В случае рационального  указан способ выбора присоединенных функций, при котором система корневых функций задачи образует безусловный базис в Спектральная задача наряду с собственными функциями содержит бесконечно много присоединенных функций. Подобные задачи В.А. Ильин назвал существенно несамосопряженными [28], отметив их характерную неустойчивость как к выбору присоединенных функций, так и к малым возмущениям оператора.

Нами установлено, что задача (1.1) обладает всеми характерными чертами существенно несамосопряженных задач и ее спектральные свойства могут коренным образом меняться при сколь угодно малых изменениях параметра

Основной результат подраздела содержится в следующих теоремах.

Теорема 1. Пусть число  иррационально. Тогда система корневых функций задачи (1.1) содержит только собственные функции, причем она полна и минимальна в но не образует базиса.

Теорема 2. Пусть число  рационально. Тогда спектр задачи (1.1) распадается на две последовательности:  при этом для каждого  имеется только одна собственная функция, а для каждого  - одна собственная и одна присоединенная функции. Система корневых функций полна и минимальна в  и присоединенные функции можно выбрать так, чтобы вся система образовывала безусловный базис в .

Отметим, что функционально-дифференциальные уравнения, подобные уравнению (1.1) исследовались многими авторами. Алгебраические и аналитические аспекты теории обыкновенных дифференциальных уравнений с инволюцией обсуждались в [4, 5]. Спектральные вопросы, возникающие в связи с дифференциальными операторами с инволюцией, затрагивались для операторов первого порядка в [6 – 9, 10 – 12] и для операторов второго порядка в [13 – 18].

Случай иррационального *r****.*** Сопряженная к (1.1) задача имеет вид

 (1.2)

Непосредственным вычислением нетрудно убедиться, что спектры задач (1.1) и (1.2) совпадают:



а собственные функции ( далее - арифметическое значение корня )

-для прямой задачи (1.1) – это функции



и для сопряженной задачи (1.2) – это функции



Лемма 1. Пусть  иррационально. Тогда каждая из систем (1.3) и (1.4) полна и минимальна в .

Лемма 2. Пусть  иррационально. Тогда существуют последовательности  и  для которых **

Из леммы 2 вытекает, что выписанные системы собственных функций не образуют базиса.

Случай рационального *r****.*** Собственные функции, отвечающие дополняются присоединенными функциями, т.е. решениями следующих неоднородных задач

 (1.5)

 (1.6)

Непосредственный подсчет дает функции





являющиеся для любых  решениями соответственно задач (1.5) и (1.6).

Отметим, что если в правой части уравнения (1.5) вместо  подставить , а в (1.6) – вместо  поставить  то задачи (1.5) и (1.6) не будут иметь решений. Это означает, что присоединенных функций второго и более высоких порядков соответствующие задачи не имеют.

Лемма 3. Пусть **** рационально. Тогда каждая из систем корневых функций, получаемых:

для задачи (1.1) объединением собственных функций (1.3), отвечающих , собственных функций  и присоединенных функций 

для задачи (1.2) объединением собственных функций (1.4), отвечающих  собственных функций  и присоединенных функций  полна и минимальна в .

Проводится оценка произведения норм корневых функций. Доказывается бесселевость каждой из выписанных систем корневых функций. Сформулированные леммы обеспечивают справедливость теорем 1 и 2.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В отчете изложены результаты исследований базисных свойств собственных функций дифференциальных операторов второго порядка с инволюцией. Получены следующие результаты:

- построена функция Грина полуограниченных одномерных дифференциальных операторов второго порядка с инволюцией с краевыми условиями Дирихле;

- доказаны теоремы о равносходимости разложений по собственным функциям одномерных дифференциальных операторов второго порядка с инволюцией с краевыми условиями Дирихле;

- доказаны теоремы о базисности и безусловной базисности собственных функций одномерных дифференциальных операторов второго порядка с инволюцией с краевыми условиями Дирихле в пространстве;

- доказаны теоремы о существовании и единственности решения смешанных задач для уравнений параболического, гиперболического и эллиптического видов с инволюцией с краевыми условиями Дирихле;

- установлена некорректность смешанной задачи для уравнения параболического вида с инволюцией с неполуограниченным оператором;

- найдены классы однозначной разрешимости смешанной задачи для уравнения параболического вида с инволюцией с неполуограниченным оператором в терминах начальных данных;

- построен пример одномерного дифференциального оператора второго порядка с инволюцией с бесконечным числом присоединенных функций;

- доказана базисность Рисса собственных и присоединенных функций построенного примера в пространстве квадратично суммируемых функций;

Полученные результаты служат обоснованием для применения метода Фурье к начально – краевым задачам в случае уравнений в частных производных с инволюцией. В случае оператора двукратного дифференцирования с инволюцией решена одна из важных задач - задача построения функции Грина задачи Дирихле. Из явного вида функции Грина видно ее существенное отличие от случая обыкновенного дифференциального оператора. Построенные функции Грина использованы при доказательстве теорем о равносходимости разложений по собственным функциям одномерных дифференциальных операторов второго порядка с инволюцией с краевыми условиями Дирихле. Для дифференциальных уравнений в частных производных параболического вида с инволюцией найдены некорректные задачи. Показаны классы разрешимости в терминах начальных данных.

Полученные результаты позволяют говорить о создании теории базисности корневых векторов дифференциальных операторов с инволюцией. Результаты могут найти применение в теории разрешимости дифференциальных уравнений в частных производных с инволюцией, при решении обратных задач и др.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1 Kirane M., Nasser A.S. Inverse problems for a nonlocal wave equation with an involution perturbation // J. Nonlinear Sci. Appl. – 2016. – Vol. 9. – P. 1243 – 1251.

2 Ahmad B., Alsaedi A., Kirane M., Tapdigoglu R.G. An inverse problem for space and time fractional evolution equations with an involution perturbation // Quaestiones Mathematicae. -

2 017. – Vol. 40, no. 2. – P. 151 – 160.

3 Wiener J. Generalized solutions of functional differential equations // World Sci.- Singapore. – 1993. – P. 160 – 215.

4 Cabada A., Adrian F.Tojo. Existence results for a linear equation with reflection, non-constant coefficient and periodic boundary conditions // Journal of Mathematical Analysis and Application. – 2014. - V. 412, №1. – P. 529 – 546. – DOI: 10.1016/j.jmaa.

5 Cabada A., Adrian F. Tojo. Solutions and Green’s function of the first order linear equation with reflection and initial conditions // Boundary Value Problems. – 2014. – V. 99.

6 Бурлуцкая М.Ш., Хромов А.П. Обоснование метода Фурье в смешанных задачах с инволюцией // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. – 2011. – Т.11, №4. – C. 3 – 12.

7 Бурлуцкая М.Ш., Хромов А.П. Метод Фурье в смешанной задаче для уравнения с частными производными первого порядка с инволюцией // Ж. вычис. матем. и матем. физ. – 2011. – T.51, №12. – С. 2233 – 2246.

10 Kopzhassarova А. А., Lukashov A. L., Sarsenbi A. M. Spectral properties of nonself-adjoint perturbations for a spectral problem with involution *//* Abstr. Appl. Anal. – V. – 2012. – Article ID 590781. – P. 5.

11 Sadybekov M.A., Sarsenbi A.M., Mixed problem for a differential equation with involution under boundary conditions of general form // Edited by: Ashyralyev A; Lukashov A, in Book Series: AIP Conference Proceedings, 2012. – V. 1470. – P. 225 – 227.

12 Садыбеков М.А., Сарсенби А.М. Решение основных спектральных вопросов всех краевых задач для одного дифференциального уравнения первого порядка с отклоняющимся аргументом // Узбекский математический журнал. – 2007. - № 3. – C. 88 – 94.

13 Сарсенби А.М. [Безусловные базисы, связанные с неклассическим дифференциальным оператором второго порядка // Дифференциальные уравнения. –](http://elibrary.ru/item.asp?id=13726688) 2010. – T. 46, №4. – С. 506 – 511.

14 Kopzhasarova A.A, Sarsenbi A.M. Basis Properties of Eigenfunction of Second-Order Differential Operators with Involution // Abstract and Applied Analysis. – 2012. – V. 2012. – P. 6 – Article ID 576843. – DOI:10.1155/2012/576843.

15 Садыбеков М.А., Сарсенби А.М. Критерий базисности системы собственных функций оператора кратного дифференцирования с инволюцией // Дифференциальные уравнения. – 2012. – T. 48, №8. – С. 1126 – 1132.

16 Садыбеков М.А., Сарсенби А.М. О понятии регулярности краевых задач для дифференциального уравнения второго порядка с отклоняющимся аргументом // Математический журнал. – 2007. – Т.7, № 1(23). – С. 82 – 88.

17 Садыбеков М.А., Сарсенби А.М. Безусловная сходимость спектральных разложений, связанных с дифференциальным уравнением второго порядка с отклоняющимся аргументом // Вестник КазНУ.– 2006. № 2(49). – С. 48 – 54.

18 Sarsenbi A.M., Tengaeva A.A. [On the basis properties of root functions of two generalized eigenvalue problems](http://www.scopus.com/scopus/inward/record.url?eid=2-s2.0-84859756791&partnerID=K84CvKBR&rel=3.0.0&md5=fc08b31053c77f77bff026e232cadaa2) // Differential Equations. – 2012. – V 48, № 2. – P. 306 – 308.

19 Przevorska - Rolewicz D. Equations with transformed argument an Algebraic approach // Warszawa. – 1973. – P. 354.

20 Ashyralyev A., Sarsenbi A.M. Well-posedness of an elliptic equation with involution // Electronic Journal of Differential Equations. – 2015. – Vol. 2015, no. 284. P. 1 – 8.

21 Ashyralyev A., Sarsenbi A.M. Well-Posedness of a Parabolic Equation with Involution // Numerical Functional Analysis and Optimization. – 2017. – P. 1–10. – Doi.org/10.1080/01630563.2017.1316997.

22 Steklov V.A. Osnovnye Zadachi Matematicheskoi Fiziki. – Moskva: 1983.

23 Il'in V.A. The solvability of mixed problems for hyperbolic and parabolic equations // Russ. Math. Surveys. – 1960. - № 15(2). – P. 85 – 142.

24 Chernyatin V.A. Refinement of an existence theorem for a classical solution of a mixed problem for a one-dimensional wave equation // Differential Equations. – 1985. – Vol. 21(9). – P. 1070 – 1075.

25 Khromov A.P. Behavior of the formal solution to a mixed problem for the wave equation // *Comp. Math Math. Phys*. – 2016. – Vol.56 (2). – P. 243 – 255.

26 Kritskov L.V., Sarsenbi A.M. Riesz basis property of system of root functions of second-order differential operator with involution // Differential Equations. – 2017. – Vol. 53, no. 1. – P. 33 – 46.

27 Сарсенби А.А. Условия разрешимости смешанных задач для уравнения параболического вида с инволюцией // Математический журнал. – 2018. – Т. 18, № 2 (68). – C. 142 – 154.

28 Ильин В.А., Крицков Л.В. Свойства спектральных разложений, отвечающих несамосопряженным операторам // Функциональный анализ: Итоги науки и техники. Сер. Соврем. мат. и ее прил. Темат.обз. -М.: ВИНИТИ, 2006. – Т. 96. – C. 5 – 105.

ПРИЛОЖЕНИЕ А

Список опубликованных работ в журналах с импакт-фактором.

1 Kritskov L.V., Sarsenbi A.M. Equiconvergence Property for Spectral Expansions Related to Perturbations of the Operator  with Initial Data // Filomat. – 2018. – V. 32:3. – P. 1069-1078. – DOI.org/10.2298/FIL1803069K.

2 Borodinova D. Yu. and Kritskov L. V. Estimates of the Root Functions of a One-Dimensional Schrodinger Operator with a Strong Boundary Singularity // Differential Equations. – 2018. – Vol. 54, no. 5. – P. 567–577

Список опубликованных работ в изданиях, входящих в базу Thomson Reuters.

1. Kritskov L. V., Sadybekov M. A., Sarsenbi А. М. Nonlocal spectral problem for a

second-order differential equation with an involution // Bulletin of the Karaganda University. Mathematics series. Special issue. – 2018. – V. 3(91). – P. 53 – 61.

1. Sarsenbi A. A. Unconditional basicity of eigenfunctions’ system of Sturm-Liouville

operator with an involutional perturbation // Bulletin of the Karaganda University. Mathematics series. Special issue. – 2018. – V. 3(91) – P. 117 – 127.

1. Sarsenbi A.M. and Utelbayeva M. The Green’s function and the basis property of the

eigenfunctions of a boundary value problem with involution // AIP Conference Proceedings, 2018. – V. 1997. – P. 020075. – DOI: 10.1063/1.5049069

1. Sarsenbi A.A. Existence of Green’s function of the boundary value problem with

involution // AIP Conference Proceedings, 2018. – V. 1997. – P. 020029. – Doi: 10.1063/1.5049023.

Список опубликованных работ в изданиях из списка КН МОН РК

5. Сарсенби А.А. Условия разрешимости смешанных задач для уравнения параболического вида с инволюцией. // Математическийжурнал.-2018. – Т. 18, №2 (68). - С. 142-154.

Список опубликованных работ в других изданиях РК

6 Сарсенби А.М. Спектральные свойства дифференциальных операторов с инволюцией // Известия Международного Казахско-Турецкого университета им. Х.А. Ясави. Серия математика, физика, информатика. – 2018. – Том 1, № 1(4). – С. 87 – 89.

Список опубликованных работ в изданиях международных конференций

7. Сарсенби А.А. Некоторые спектральные характеристики дифференциального оператора второго порядка с инволюцией // Тезисы докладов Традиционной международной научной апрельской конференции. Институт математики и математического моделирования. - Алматы, 2018. – С. 64.

8 Сарсенби А.А., Сарсенби А.М. Базисные свойства дифференциального оператора второго порядка с инволюцией // Тезисы докладов Традиционной международной научной апрельской конференции. Институт математики и математического моделирования. - Алматы, 2018. – С. 65.

9 Сарсенби А.А. Существование и единственность решения смешанных задач для уравнения параболического вида с инволюцией. // Материалы международной конференции «Понтрягинские чтения – XXIX. Современные методы теории краевых задач», посвященной 90 – летию В.А. Ильина. – Москва, 2-6 мая 2018. – С. 202.

10 Крицков Л.В., Сарсенби А.М. Теория базисности В.А. Ильина в случае дифференциальных операторов с инволюцией // Материалы международной конференции «Понтрягинские чтения – XXIX. Современные методы теории краевых задач», посвященной 90 – летию В.А. Ильина. – Москва, 2-6 мая 2018. – С.203.

11 Sarsenbi A.M., Kritskov L.V., Criterion for the unconditional basicity of the root functions related to the second-order differential operator with involution // The abstract book

of the conference ICAAM 2018. - Near East University, Lefkosa (Nicosia), Mersin 10, Turkey: 6-9 September, 2018. – P. 130 – 131.

12 Sarsenbi A.A., Fourier method approach in mixed problems for the heat equation with involution perturbation // The abstract book of the conference ICAAM 2018. - Near East University, Lefkosa (Nicosia), Mersin 10, Turkey: 6-9 September, 2018. – P. 160.

13 Сарсенби А.А. Разложение по собственным функциям неклассического дифференциального оператора второго порядка // International conference Mathematical analysis and its application to mathematical physics. - Samarkand, Uzbekistan: 17 -19 September, 2018. – Part II. – P. 46

ПРИЛОЖЕНИЕ В









