Министерство образования и науки Республики Казахстан

Комитет науки

РЕСПУБЛИКАНСКОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ ПРЕДПРИЯТИЕ

ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

УДК 517.925, 519.21

МРНТИ 27.29.17, 27.35.30

№ госрегистрации 0118РК00391

Инв. №

 УТВЕРЖДАЮ

 Генеральный директор РГП ИМММ

 д.ф.-м.н., академик НАН РК

 Т.Ш.Кальменов

 "\_\_\_\_\_" октября 2018 г.

ОТЧЕТ

О НАУЧНО-ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКОЙ РАБОТЕ

по теме:

 РАЗВИТИЕ МЕТОДОВ РЕШЕНИЯ ОБРАТНЫХ ЗАДАЧ СТОХАСТИЧЕСКИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ СИСТЕМ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЕ

(промежуточный)

Руководитель темы

д.ф.-м.н., профессор \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ М.И.Тлеубергенов

Алматы 2018

СПИСОК ИСПОЛНИТЕЛЕЙ

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Руководитель темы,д.ф.-м.н., проф. | \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ | М.И. Тлеубергенов(Введение, заключение,разделы 1-3) |
| Главный научный сотрудник,д.ф.-м.н. | \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ | С.С. Жуматов(раздел 4) |
| Главный научный сотрудник,д.ф.-м.н. | \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ | К.Б. Бапаев(раздел 5) |
| Старший научный сотрудник,к.ф.-м.н. | \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ | Г.Т. Ибраева(раздел 1) |
| Старший научный сотрудник,к.ф.-м.н. | \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ | Д.Т. Ажымбаев(раздел 2) |
| Научный сотрудник,Доктор PhD  | \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ | Г.К. Василина(раздел 3) |
| Младший научный сотрудник,магистр | \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ | Н.Д. Сисекенов(раздел 4) |
| Нормоконтролер,к.ф.-м.н. | \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ | М.А. Сахауева |

РЕФЕРАТ

Отчет 40 с., 50 источников, 2 прил.

ОБРАТНЫЕ ЗАДАЧИ, УСТОЙЧИВОСТЬ, ИНТЕГРАЛЬНОЕ МНОГООБРАЗИЕ, СТОХАСТИЧЕСКИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Объектом исследования являются дифференциальные и стохастические дифференциальные уравнения, разностные уравнения. Цель работы состоит в дальнейшем развитии методов решения обратных задач дифференциальных систем при наличии случайных возмущений, разработке математических средств исследования таких задач. В работе использованы качественные методы исследования дифференциальных уравнений, метод функций Ляпунова, методы стохастического дифференциального и интегрального исчисления. Получены следующие результаты:

Методом дополнительных переменных Лиувилля решена обратная задача стохастических дифференциальных систем.

Решена обратная задача для стохастических систем Биркгофа.

Построено множество не зависящих явно от времени вектор-функций сравнения программного движения при наличии случайных возмущений.

Получены достаточные условия устойчивости программного многообразия неавтономных систем прямого управления со стационарными нелинейностями.

Проведено исследование устойчивости РДС по Пуассону и по Лагранжу.

Новизна результатов работы заключается в решении поставленных задач при дополнительном предположении о наличии случайных возмущений. Результаты исследования носят теоретический характер и могут быть использованы при построении математических моделей динамики реальных процессов с учетом действия случайных возмущающих сил.

РЕФЕРАТ

Есеп 40 бет, 50 шығу көзі, 2 қосымша.

КЕРІ ЕСЕПТЕР, ОРНЫҚТЫЛЫҚ, ИНТЕГРАЛДЫҚ КӨПБЕЙНЕ, СТОХАСТИКАЛЫҚ ДИФФЕРЕНЦИАЛДЫҚ ТЕҢДЕУЛЕР

Зерттеу нысаны дифференциалдық және стохастикалық дифференциалдық теңдеулер, айырымдық теңдеулер болып табылады. Жұмыстың мақсаты кездейсоқ түрткісі бар дифференциалдық жүйелердің кері есептерін шешу әдістерін әрі қарай дамытудан, осындай есептерді зерттеудің математикалық құралдарын жасаудан құралады. Жұмыста дифференциалдық теңдеулерді зерттеудің сапалық әдістері, Ляпунов функциялар әдісі, стохастикалық дифференциалдық және интегралдық есептеулердің әдістері қолданылған.

Келесі нәтижелер алынған:

Лиувиллдің қосымша айнымалылары әдісімен стохастикалық диффренциалдық жүйелердің кері есептері шешілді.

Биркгофтің стохастикалық жүйелері үшін кері есебі шешілді.

Кездейсоқ түрткілі күштері бар бағдарламалық қозғалыстың уақыттан айқын түрде тәуелсіз салыстыру вектор-функцияларыныңжиыны тұрғызылды.

Тура басқарулы және стационар бейсызықты автономды емес жүйелердің бағдарламалық көпбейнесі орнықтылығының жеткіліктішарттары алынды.

Пуассон және Лагранж бойынша АДЖ орнықтылығына зерттеу жүргізілді.

Жұмыстың нәтижелерінің жаңалығы кездейсоқ түрткілер бар болуы туралы қосымша болжамда қойылған есептердің шешілуінде болады. Зерттеу нәтижелерінің теориялық маңызы бар және кездейсоқ түрткілеуші күщтерді ескере отырып нақты үдерістердің динамикасының математикалық моделдерін тұрғызуда пайдалануға болады.

СОДЕРЖАНИЕ

|  |  |
| --- | --- |
| ВВЕДЕНИЕ | 6 |
| 1 Метод дополнительных переменных Лиувилля в стохастической задаче Гельмгольца | 9 |
| 2 Стохастическая задача Гельмгольца для систем Биркгофа | 11 |
| 3 Построение множества функций сравнения программного движения при наличии случайных возмущений | 18 |
| 4 Абсолютная устойчивость программного многообразия систем автоматического управления с переменными коэффициентами | 20 |
| 5 Устойчивость разностно-динамических систем по Пуассону | 25 |
| 6 Устойчивость разностно-динамических систем по Лагранжу | 29 |
| ЗАКЛЮЧЕНИЕ | 31 |
| СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ | 32 |
| ПРИЛОЖЕНИЕ А Список публикаций | 36 |
| ПРИЛОЖЕНИЕ Б Календарный план | 38 |

ВВЕДЕНИЕ

Отчет содержит исследования по дальнейшему развитию методов решения обратных задач дифференциальных систем.

Под обратными задачами дифференциальных систем понимаются как задачи о построении силовых полей, так и задачи об определении функционалов, стационаризуемых в процессе движения, о восстановлении и построении уравнений движения механической системы по заданным свойствам ее движения. Эти задачи продолжают привлекать к себе внимание математиков и механиков своими широкими прикладными возможностями и восходят к таким классическим обратным задачам для дифференциальных систем, как задача Ньютона, задача Бертрана, задача Суслова, задача Мещерского и задача Гельмгольца. Решения этих задач с дальнейшим обобщением их физической интерпретации раскрыли новые положения и явления в естественных науках; некоторые из них оказались исходными задачами в становлении и развитии современных отраслей науки по управлению движениями материальных систем. Новый этап в исследовании обратных задач дифференциальных систем связан с возросшим в последние годы интересом к исследованию задачи Гельмгольца. Особое место по разнообразию аспектов исследования задачи Гельмгольца и полноте изложения материала занимает двухтомная монография американского ученого Р.М. Сантилли (1978, 1983), посвященная задаче представления обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка в виде уравнений Лагранжа, Гамильтона и Биркгофа. В монографиях А.С. Галиуллина (1989, 1997, 2000) рассматривается обобщение гамильтоновых систем в смысле приводимости произвольных обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) к классическим уравнениям динамики и решается, в частности, задача гамильтонизации уравнений систем программного движения. В настоящее время сформулированы возможные постановки обратных задач дифференциальных систем и достаточно полно разработаны общие методы решения этих задач в классе ОДУ. Вместе с тем, во многих работах по стохастической устойчивости и стохастическому управлению рассматриваются динамические системы, описываемые дифференциальными уравнениями второго порядка типа Ито. Этими уравнениями описываются многочисленные и важные в приложении модели механических систем, учитывающие воздействие внешних случайных сил, например, движение искусственного спутника Земли под действием сил тяготения и аэродинамических сил, флуктуационный дрейф тяжелого гироскопа в кардановом подвесе и др. Поэтому важной представляется задача обобщения методов решения обратных задач динамики на класс стохастических дифференциальных уравнений.

В современной теории обратных задач дифференциальных систем сформулированы возможные постановки задач и разработаны общие методы решения этих задач в классе обыкновенных дифференциальных уравнений. При этом оказалось, что если заданные свойства движения механической системы могут быть аналитически представлены как первые или частные интегралы соответствующих уравнений движения, то решение обратных задач дифференциальных систем в общем случае сводится к построению дифференциальных уравнений по заданным их интегралам и к определению, в дальнейшем, из них искомых сил и моментов, параметров и связей, необходимых для осуществления движения рассматриваемой механической системы с предварительно заданными свойствами [1]. Один из общих методов решения обратных задач дифференциальных систем в классе обыкновенных дифференциальных уравнений (метод квазиобращения) предложен в работе Р.Г. Мухарлямова [2]. Следует также отметить, что интенсивно развивающаяся теория обратных задач дифференциальных систем является обобщением методов решения классических обратных задач динамики. Основные идеи этой теории были впервые сформулированы Н.П. Еругиным [3], А.С. Галиуллиным [4, 5] и получили дальнейшее развитие в работах И.А. Мухаметзянова, Р.Г. Мухарлямова и других авторов [6, 7-10]. Причем для решения обратных задач дифференциальных систем исходной является задача о построении дифференциальных уравнений по заданным интегралам, поставленная Н.П. Еругиным [3]. Новый этап в исследовании обратных задач обыкновенных дифференциальных систем связан с возросшим в последние годы интересом к исследованию задачи Гельмгольца (обзор работ см., например, в [11, 12]). Классическая задача Гельмгольца [13] - это задача построения по заданным обыкновенным дифференциальным уравнениям второго порядка эквивалентных дифференциальных уравнений в форме Лагранжа. И уравнения, для которых такой переход возможен, называются системами Гельмгольца [11-15]. Решение задачи Гельмгольца в том или ином классе дифференциальных уравнений позволяет распространить на этот класс уравнений хорошо развитые математические методы классической механики [11, 16, 17]. Одним из основных требований в теории обратных задач дифференциальных систем, связанных с работоспособностью системы и ее неподатливостью к возмущениям, является требование устойчивости заданных свойств движения [5], поэтому решение задачи устойчивости программного движения [18-24] имеет существенное значение для дальнейшего развития качественной теории обратных задач дифференциальных систем и теории построения систем программного движения.

Основы и методы решения обратных задач дифференциальных систем разработаны в основном лишь для детерминированных систем, уравнения которых являются обыкновенными дифференциальными уравнениями. И в большинстве случаев обыкновенные дифференциальные уравнения являются достаточно эффективным аппаратом для моделирования реальных процессов, проходящих в динамических системах. Но повышение требований к точности и работоспособности материальных систем приводит к ситуации, когда многие наблюдаемые явления уже не могут быть объяснены с позиции детерминированных процессов. Это обстоятельство требует, в частности, привлечения вероятностных законов для моделирования поведения реальных систем. Поэтому актуальной представляется задача обобщения методов решения обратных задач дифференциальных систем на класс стохастических дифференциальных уравнений. В данном проекте (2018-2019г.) предполагается, что динамика исследуемой системы описывается обыкновенным дифференциальным уравнением, а флуктуации ее параметров представляют собой процессы типа "белого шума", интенсивность которых может зависеть от состояния системы. Случайный процесс, вызываемый лишь начальными отклонениями и флуктуациями параметров, является, как известно, марковским [25], а уравнение, описывающее его траекторию, можно понимать, как стохастическое дифференциальное уравнение Ито. Стохастическими дифференциальными уравнениями типа Ито описываются многочисленные и важные в приложении модели механических систем, учитывающие воздействие внешних случайных сил, например, движение искусственного спутника Земли под действием сил тяготения и аэродинамических сил [26], или флуктуационный дрейф тяжелого гироскопа в кардановом подвесе [27] и многие другие.

В настоящей работе изучаются обратные задачи динамики в вероятностной постановке, исследуется влияние случайных возмущающих сил на разрешимость обратных задач динамики и устойчивость заданных свойств движения.

В рамках данного отчета представлены результаты исследований по построению множества стохастических дифференциальных уравнений, обладающих заданным устойчивым интегральным многообразием.

В настоящем отчете отражены исследования по теме "Развитие методов решения обратных задач стохастических дифференциальных систем и их приложение" за 2018 год. Результаты, полученные исполнителями, являются новыми и вносят значительный вклад в современную качественную теорию дифференциальных уравнений, свидетельством чему являются публикация работ исполнителей в авторитетных математических журналах и их участие с научными докладами на международных конференциях.

1 Метод дополнительных переменных Лиувилля в стохастической задаче Гельмгольца

Методом Лиувилля стохастические уравнения Ито первого порядка приводятся к стохастическим уравнениям канонической структуры.

Пусть задана система стохастических дифференциальных уравнений Ито первого порядка

 (1.1)

Требуется привести систему уравнений (1.1) к эквивалентным уравнениям гамильтоновой структуры.

Предполагаем, что функции, входящие в приведенные выше уравнения, обладают необходимой для дальнейших рассуждений гладкостью и удовлетворяют теореме существования и единственности решения задачи Коши в классе стохастических диффе-ренциальных уравнений Ито [28].

Здесь  - системы случайных процессов с независимыми приращениями, которые, следуя [28], можно представить в виде суммы процессов: где , векторный винеровский процесс;  пуассоновский процесс;  число скачков процесса  в интервале [0, t], попадающих на множество ; - векторная функция, отображающая пространство  в пространство значений  процесса  при любом t, а эквивалентность решений уравнений понимается в смысле эквивалентности почти наверное (п.н.) [29]: случайные процессы  и  эквивалентны п.н. или потраекторно, если из  п.н. следует  при всех  п.н.

Указанная задача при отсутствии случайных возмущений   рассмотрена в [30].

Здесь и далее по повторяющимся индексам сомножителей предполагается суммирование. Индексы  изменяются от  до , а индекс  - от  до .

Для решения поставленной задачи воспользуемся методом Лиувилля[30]. А именно, введем вспомогательные переменные , и определим функцию Гамильтона расширенной системы в виде

 (1.2)

Тогда  и соответствующие уравнения движения расширенной системы запишутся в виде

  (1.3)

где уравнения  совпадают с исходными уравнениями (1.1), а уравнения  служат для определения вспомогательных переменных .

Таким образом справедлива

Теорема 1.1 Необходимыми и достаточными условиями представления уравнения Ито первого порядка (1.1) в виде уравнений канонической структуры (1.3) является представление функции Гамильтона в виде (1.2) с помощью дополнительных переменных , которые определяются из уравнений .

2 Стохастическая задача Гельмгольца для систем Биркгофа

По заданному стохастическому уравнению Ланжевена-Ито в непрямом представлении строится как уравнение гамильтоновой структуры, так и уравнение биркгофиановой структуры. Методом моментных функций определяется функционал, принимающий стационарное значение на решениях заданного стохастического уравнения Биркгофа.

Постановка задачи. По заданному в форме Ланжевена-Ито уравнению

 (2.1)

требуется построить эквивалентное уравнение гамильтоновой (или биркгофиановой) структуры. Здесь, где, следуя [28], винеровский процесс, пуассоновский процесс, число скачков процесса в интервале  попадающих на множество  где 

Будем говорить, что некоторая функция  из класса  если непрерывна по  и липшицевы по  во всем пространстве и удовлетворяет условию линейного роста по :  с некоторой константой

Предположим, что заданная вектор-функция и матрица  принадлежат классу

И так как вектор-функция  и  матрица  предполагаются из класса то это обеспечивает [28] в  существование и единственность до стохастической эквивалентности решения уравнения (1) с начальным условием  являющегося с вероятностью 1 строго марковским процессом.

Данная постановка задача в отсутствии случайных возмущений () рассматривалась в двухтомной монографии Р.М. Сантилли [16], а в вероятностной постановке задача Гельмгольца ранее исследовалась в [31,32], где по заданному уравнению (1) строятся уравнения лагранжевой структуры, и, далее, по стохастическому уравнению Лагранжа определяется стохастический аналог вариационного принципа Гамильтона.

Для решения поставленной задачи предварительно введем новую переменную  и перепишем заданное уравнение (2.1) в виде

 (2.2)

И затем, с помощью замен 

перепишем уравнение (2.2) в виде

  (2.3)

Далее, стохастическое уравнение гамильтоновой структуры

  (2.4)

с помощью замены  и матриц а также с учетом того, что перепишем в виде

  (2.5)

Или, если ввести обратную к  матрицу и -мерный вектор то уравнение (2.5) преобразуется к эквивалентному уравнению

  (2.6)

Построение гамильтониана в непрямом представлении. Рассмотрим задачу непрямого представления уравнения (2.3) в виде уравнения гамильтоновой структуры (2.6), т.е. с помощью некоторой матрицы  рассмотрим соотношение

  (2.7)

или

 (2.7')

. Для выполнения тождества (2.7) требуется выполнение условий

  (2.8)

  (2.9)

 (2.10)

Из (2.9) и (2.10) следует  что влечет выполнение равенства

  (2.11)

Следовательно справедлива

Теорема 2.1 Для непрямого представления стохастического уравнения (2.3) в форме стохастического уравнения Гамильтона (2.6) необходимо и достаточно выполнение условий (2.8), (2.10), (2.11).

Замечание. Для построения функции Гамильтона , определяющей вид уравнения (2.6), следует для заданного уравнения проверить условия Гельмгольца, которые, следуя Р.М. Сантилли [16], представляют следующие соотношения:

  (2.12)

  (2.13)

 (2.14)

Построение биркгофиана в непрямом представлении. Рассмотрим стохастическую задачу Гельмгольца в следующей постановке: по заданному уравнению

  (2.15)

построить стохастическое уравнение биркгофиановой структуры вида

  (2.16)

где  называется функцией Биркгофа, а  - тензором Биркгофа [16] с компонентами  =   .

Стохастическая система Биркгофа (2.16) представляет собой непосредственное обобщение стоастической системы Гамильтона (2.6). Действительно, при          уравнение (2.16) принимает форму канонических уравнений (2.6).

Для решения поставленной задачи рассмотрим соотношение



которое выполняется тождественно при следующих условиях

  (2.17)

  (2.18)

 (2.19)

Следовательно, имеет место

Теорема 2.2 Для прямого представления стохастического уравнения (2.15) в виде стохастического уравнения Биркгофа (2.16) необходимо и достаточно выполнения условий (2.17)-(2.19).

 Непрямое представление стохастического уравнения Гамильтона в виде стохастического уравнения Биркгофа. Рассмотрим задачу непрямого построения уравнения Биркгофа (2.16) по заданному уравнению Гамильтона (2.6) при наличии случайных возмущений.

Иначе говоря, по заданным функциям  и  определим  и  так, чтобы выполнялось соотношение



  (2.20)

которое превращается в тождество при выполнении соотношений

  (2.21)

  (2.22)

  (2.23)

Следовательно, имеет место

Теорема 2.3 Для непрямого представления стохастического уравнения Гамильтона (2.6) в виде стохастического уравнения Биркгофа (2.16) необходимо и достаточно существование  функций  таких, что при заданных функциях , , , ,  выполнялись условия (2.21)-(2.23). Действие по Биркгофу в стохастической задаче Гельмгольца. Задача Гельмгольца в классе стохастических дифференциальных уравнений Ланжевена-Ито разбивается на две взаимосвязанные задачи. На первом этапе по заданному уравнению строится стохастический аналог уравнения Лагранжа, Гамильтона или Биркгофа. И далее, на втором этапе по построеным ,  или  с  нужно построить искомый функционал (действие по Гамильтону или по Биркгофу).

В этом разделе рассматривается один из вариантов построения стохастического аналога действия по Биркгофу. Рассмотрим стохастическое уравнение лагранжевой структуры

  (2.24)

которое предполагается, следуя работам [31,32], построенным в прямом или косвенном представлении по заданному уравнению (2.1).

Усредненный лагранжиан  тогда будет удовлетворять [31] следующему уравнению  По функции  преобразованием Лежандра определим усредненный гамильтониан  =  который порождает следующее каноническое уравнение



Или в переменных  каноническое уравнение типа уравнения (2.6)

  (2.24')

Далее, на основе теоремы 2.3 по уравнению (2.24') строим множество , порождающее уравнение Биркгофа (2.25)

  (2.25)

эквивалентное непрямому уравнению Гамильтона (2.26)

  (2.26)

при выполнении условий (2.27), (2.28)

  (2.27)

  (2.28)

Тогда функционал, принимающий стационарное значение на решениях уравнения (2.1) строится в форме усредненного действия по Биркгофу в виде



3 Построение множества функций сравнения программного движения при наличии случайных возмущений

По заданной программе движения

 , , , , (3.1)

требуется построить соответствующее множество уравнений движения материальной системы

 , , (3.2)

в классе уравнений, допускающих для начальных условий  существование единственного до стохастической эквивалентности решения уравнения (3.2) и множество n-мерных вектор-функций , голоморфных в некоторой -окрестности  интегрального многообразия (3.1) при всех , по отношению к составляющим которых имеется устойчивость по вероятности.

Уравнение возмущённого движения материальной системы, для которой заданное движение (3.1) является возможным, может быть, следуя [1], представлено в виде

 , (3.3)

где - вектор-функция, -  матрица типа Еругина, удовлетворяющие условиям , .

Определение 3.1 Функция называется функцией класса Хана, , если она – непрерывна, строго возрастающая и удовлетворяет условию .

Определение 3.2 [25]Программное многообразие  (3.1) уравнения (3.2) называется -устойчивым по вероятности, если



Теорема 3.1 Если в окрестности интегрального многообразия  существует функция Ляпунова  со свойствами

 , , (3.4)

 , , (3.5)

то программное движение  системы (3.3) асимптотически - устойчиво по вероятности относительно произвольной - мерной вектор-функции , непрерывной в окрестности , .

Доказательство. По определению - устойчивости [33] рассмотрим разность . По условию теоремы существует функция Ляпунова  со свойствами (1.4), (1.5), что обеспечивает асимптотическую по вероятности - устойчивость программного движения  [27], то есть

 , (3.6)

и из непрерывности вектор-функции и условия (3.6) следует

,

что означает асимптотическую устойчивость движения системы (3.3) относительно вектор-функции .

4 Абсолютная устойчивость программного многообразия систем автоматического управления с переменными коэффициентами

Исследуется абсолютная устойчивость программного многообразия неавтономных основных систем управления со стационарными нелинейностями. Условия устойчивости основных систем исследованы в окрестности заданного программного многообразия. Нелинейности удовлетворяют условиям локальной квадратичной связи. Достаточные условия абсолютной устойчивости программного многообразия, относительно заданной вектор-функции, получены с помощью построения функции Ляпунова, «квадратичная форма плюс интеграл от нелинейности». Указан конкретный метод подбора матрицы Ляпунова.

Построению множество систем дифференциальных уравнений, по заданной интегральной кривой, затем построению систем программного движения посвящены достаточное количество работ. Эти работы получили начало в работе Еругина [3] и в дальнейшем были развиты, как решения различных обратных задач динамики, задачи построения систем дифференциальных уравнений, систем автоматического управления [34-46]. Подробный обзор литературы приводится в работах [34, 36, 43, 45].

Рассмотрим задачу построения, по заданному программному многобразию , систему автоматического управления следующей структуры [35]

 , (4.1)

где  - некоторая n-вектор-функция, удовлетворяющая условиям существования решения;  - матрицы; -вектор управления по отклонению от заданной программы, удовлетворяющий условиям

, (2.2)

. Здесь  класс непрерывных, непрерывно-дифференцируемых и ограниченных по норме матриц. Следует отметить, что заданная программа осуществляется точно лишь в случае, когда выполняется. Но эти условия не всегда выполняются, так как имеются начальные и постоянно действующие возмущения. Поэтому целесообразно исследовать на предмет устойчивости само программное многообразие относительно некоторой заданной функции.

 Принимая во внимание, что многообразие является интегральной для системы (4.1), получим

, (4.3)

где  и  - вектор-функция Еругина [3], удовлетворяющая условию . Если положим, что ,  - гурвицева матрица, то, продифференцировав многообразие по времени t в силу системы (4.1) с учетом соотношений (4.3), получим

 (4.4)

 (4.5)

В пространстве выделим область вида

. (4.6)

Определение 4.1 Множество  называется интегральным многообразием уравнения (4.1) если из  следует  для всех.

Определение 4.2 Программное многооборазие  называется абсолютно устойчивым относительно вектор-функции  если оно асимптотически устойчиво в целом (4.4) для всех  и функции  удовлетворяющей условию (4.5).

Постановка задачи. Получить условия абсолютной устойчивости программного многообразия  неавтономных основных систем управления относительно вектор-функции .

На основании обобщенной теоремы А.М.Ляпунова [35, стр. 226] справедлива следующая теорема

Основная теорема. Если существует вещественная, непрерывная, непрерывно-дифференциремая функция  в области (4.6) и положительно-определенная и допускающая высший предел в целом такая, что ее проиводная

 (4.7)

была бы функцией определенно-положительной при любой фуекции  удовлетворяющей условиям (4.5), то программное многообразие абсолютно устойчиво.

 а) Асимптотическая устойчивость программного мнолгобразия линейной системы. Сначала рассмотрим линейную неавтономную систему относительно вектор-функции 

 (4.8)

Если для нее построим функцию Ляпунова вида

 , (4.9)

то производная по времени  в силу системы (8) получится в следующей форме

, (4.10)

где = симметричная матрица вида

. (4.11)

Пусть матрица  и она является невырожденной, матрицы и  удовлетворяют матричному равенству

, (4.12)

где - произвольная матрица. Тогда матрицу  можно взять в виде

. (4.13)

В силу (4.13) из соотношений (4.11) получим

. (4.14)

В силу теоремы Кронекера-Капелли всегда существует матрица , удовлетворяющая уравнению (4.12).

Теорема 4.1 Если матрица  системы (4.8) является невырожденной и вместе с матрицей  удовлетворяют равенству (4.12), то, какова бы ни была наперед заданная квадратичная форма с матрицей существует единственная квадратичная форма  с матрицей  и удовлетворяет уравнению

. (4.15)

Теорема 4.2 Для асимптотической устойчивости в целом программного многообразия линейной системы относительно вектор-функции  достаточно выполнения соотношений

. (4.16)

б) Абсолютная устойчивость программного многообразия основной системы управления. Теперь рассмотрим систему (4.4), (4.5).

Для нее построим функцию Ляпунова вида (4.9). Дифференцируя ее по времени  в силу системы (4.4), (4.5) и применяя S-процедуру получим

, (4.17)

где , , , а S определяется формулой (4.5).

Введем обозначения . Для того, чтобы  положительно-определенной достаточно выполнения . Тогда на основании основной теоремы справедлива:

Теорема 4.3 Для абсолютной устойчивости программного многообразия основной системы автоматического управления относительно вектор-функции  достаточно выполнения соотношений , и условий (4.5), где матрица  определяется формулой (4.13), а находится из выражении (4.12).

При выполнении следующего равенства

=0, (4.18)

получим . Тогда, для того, чтобы  положительно-определенной достаточно выполнения , где

. (4.19)

Следствие 4.1 Для абсолютной устойчивости программного многообразия  основной системы автоматического управления относительно вектор-функции , достаточно выполнений соотношений  и (4.18), а также выполнении условии (4.19), где матрицы  и  определяются формулами (4.13) и (4.12) соответственно.

5 Устойчивость разностно-динамических систем по Пуассону

Исследуется устойчивость разностно-динамических систем (РДС) по Пуассону с помощью оператора дискретного сдвига [47]. Рассмотрим РДС

 (5.1)

где – векторная функция, определенная и непрерывная вместе со своими частными производными на прямом произведении

Выполнение указанных условий означает, что для системы (1) выполнены условия следующей теоремы существования и единственности.

Теорема 5.1 Пусть

 (5.2)

некоторая точка множества Тогда для каждой точки (5.2) существует решение РДС (5.1) с начальным условием

 (5.3)

определенное на некотором интервале, содержащем точку При этом, если имеются два решения с одинаковым начальным значением (5.3), каждое из которых определено на своем множестве, содержащем точку , то эти решения совпадают в общей области их определения.

Пусть

 (5.4)

решение РДС (5.1), определенное на и

 (5.5)

решение этой же системы, но определенное на некотором другом интервале. Будем говорить, что решение (5.5) является продолжением решения (5.4), если интервал содержит в себе Решение (5.5) совпадает с решением (5.4) на интервале В частности принято считать, что решение (5.5) является продолжением решения (5.4), если интервал содержит в себе интервал а решение (5.5) совпадает с решением (5.4) на интервале Решение (5.5) является продолжением решения (5.4) даже в том случае, когда интервалы и совпадают, как полностью совпадают и решения (5.4) и (5.5).

При этом решение (5.4) называется непродолжаемым, если не существует никакого отличного от него решения, являющегося продолжением. Нетрудно показать, что каждое решение может быть продолжено до непродолжаемого решения, причем единственным способом. Поэтому в дальнейшем будем рассматривать только непродолжаемые решения. Чтобы подчеркнуть, что некоторое решение РДС (5.1) является решением с начальным условиям (5.3), будем в дальнейшем записывать это решение в виде

 (5.6)

Тогда легко видеть, что

1. Для каждой точки (5.2) множества существует непродолжаемое решение РДС (5.1) с начальным условием (5.3).
2. Если некоторое непродолжаемое решение РДС (5.1) совпадает с некоторым другим непродолжаемым решением данной системы хотя бы при одном значении то оно является продолжением этого решения.
3. Если два продолжаемых решения РДС (5.1) совпадают между собой хотя бы для одного значения то они полностью совпадают, т.е. имеют один и тот же интервал определения и равны на нем.

Пусть (5.6) некоторое непродолжаемое решение РДС (1) с начальным условием (5.3), определенное на интервале

 (5.7)

зависящем от начальных значений (5.2). Множество всех точек – пространства для которых решение (5.6) определено, удовлетворяет очевидным условиям: точка (5.2) принадлежит множеству а число интервалу (5.7). Тогда имеет место следующая теорема, хорошо известная как теорема о непрерывной зависимости решений от начальных значений.

Теорема 5.2 Множество всех точек на котором определена функция являющаяся продолжаемым решением (5.6) РДС (5.1) с начальными значениями (5.2) есть открытое множество в пространстве При этом функция непрерывна по совокупности всех аргументов на

Заметим теперь, что на ряду с понятием решения РДС (5.1) часто оказывается более удобным использовать весьма близкий к нему объект, который назовем движением.

Пусть непродолжаемое решение (5.6), определенное для всех значений и пусть функция задаваемая равенством

 (5.8)

Предположим, что под действием некоторого закона, математически описываемого РДС (5.1), физическая система за время перейдет в новое состояние С математической точки зрения представляется уместным определить через решение РДС (5.1) по формуле С физической точки зрения более уместной представляется запись При этом, очевидно, понятия решения РДС (5.1) и соответствующей ему функции эквивалентны.

Определение 5.1 Пусть отображение множества в пространстве Положим и будем считать, что

1. отображение непрерывно по совокупности переменных на множестве
2. для всех значений
3. для всех значений

Тогда будем говорить, что есть движение неавтономной РДС [6], если пара фиксирована.

Из приведенного определения видно, что понятие движения является более широким нежели понятие решения РДС (5.1). Так, в частности, отображение не обязано быть дифференцируемым по не говоря уже о Вместе с тем, если в области определения решения РДС (5.1), определенного при принять то несложно заметить, что приведенные выше определения движения и решения весьма близки. Более того, движение превращается в решение, если И наконец, будем называть оператор оператором сдвига вдоль движения Здесь также необходимо отметить, что вид оператора сдвига вдоль движений, соответствующих решениям РДС (5.1), определяется правой частью РДС.

Определение 5.2 Точка называется положительно устойчивой по Пуассону, если для каждой окрестности и каждого положительного числа можно указать такое число что Аналогичным образом, точка называется отрицательно устойчивой по Пуассону, если для каждой ее окрестности и каждого положительного числа можно указать такое число что И, наконец, точка устойчивая по Пуассону, одновременно положительно и отрицательно, называется устойчивой по Пуассону [48-50].

Теорема 5.3 Если точка положительно устойчива по Пуассону, то каждая точка траектории описываемой движением также положительно устойчива по Пуассону. Аналогичное утверждение имеет место для точек, отрицательно устойчивых по Пуассону.

Доказательство. Прежде всего заметим, что точка положительно устойчива по Пуассону тогда и только тогда, когда существует такая последовательность целых чисел, что

 (5.9)

В самом деле, из равенства (5.9) определение положительной устойчивости следует непосредственно. Обратно, если имеет место положительная устойчивость, найдется такая последовательность положительных чисел и натуральные числа что откуда следует (5.9).

Пусть теперь есть произвольная точка траектории функции Тогда, в силу свойства 1) определения 5.1, для всех значений справедливо равенство В силу теоремы 5.3, несложно заметить, что в дальнейшем имеет смысл говорить о положительной и отрицательной и просто устойчивости по Пуассону не отдельных точек, а движений и траекторий динамических систем.

6 Устойчивость разностно-динамических систем по Лагранжу

С помощью дискретного аналога второго метода Ляпунова получены необходимые и достаточные устойчивости по Лагранжу РДС.

Рассмотрим РДС

 (6.1)

Пусть ее решение с начальным Ясно, что

а) либо это решение может быть продолжено для всех значений и тогда мы будем говорить, что решение неограниченно продолжаемо;

б) либо существует такое что при и тогда мы будем говорить, что решение имеет конечное время определения;

в) решение ограничено.

Две возможности а) и б) явно несовместимы, но дополняют друг друга. Третий случай в) совместим с а) и не совместим с б).

Определение 6.1 РДС (6.1) называется устойчивой по Лагранжу, если

1) каждое решение  где  существует для всех ;

2) ограничена на ..

Например, если РДС (6.1) имеет ограниченное решение асимптотически устойчивое в целом, то это РДС устойчиво по Лагранжу.

Используя функции Ляпунова, нетрудно сформулировать необходимые и достаточные условия устойчивости РДС (6.1) по Лагранжу

Теорема 6.1 Для того, чтобы РДС (6.1) была устойчива по Лагранжу, необходимо и достаточно, чтобы в существовала функция такая, что

1) где ;

2) для каждого решения функция была не возрастающей относительно .

Доказательство. Достаточность. Пусть для РДС 1) существует функции  обладающая свойствами 1) и 2). Для всякого решения  .

В силу условия 2) при имеем . Отсюда на основании 1) получаем

 при . (6.2)

Из последнего неравенства следует, что решение  ограничено.

Действительно, если это не так, то нашлась бы последовательность моментов такая, что  и следовательно . Это противоречило бы неравенству (6.2), что невозможно.

Необходимость. Пусть любое решение  РДС (6.1) существует и ограничено в . Положим

 (6.3)

где  Из формулы имеем (6.3) имеем .

Причем, очевидно. Т.е. условие 1) выполнено.

Далее, при  учитывая, что в силу свойства единственности решения  является продолжением решения  получаем



Таким образом, условие 2) также выполнено.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Данный отчет содержит исследования по теме "Развитие методов решения обратных задач стохастических дифференциальных систем и их приложение", выполненные в 2018 году в области качественной теории обыкновенных дифференциальных уравнений. Полученные результаты имеют целью исследование разрешимости обратных задач дифференциальных систем при наличии случайных возмущений, изучение влияния случайных возмущающих сил на разрешимость обратных задач динамики и устойчивость заданных свойств движения.

1 Методом дополнительных переменных Лиувилля решена обратная задача стохастических дифференциальных систем.

2. Решена обратная задача для стохастических систем Биркгофа.

3 Построено множество не зависящих явно от времени вектор-функций сравнения программного движения при наличии случайных возмущений.

4 Получены достаточные условия устойчивости программного многообразия неавтономных систем прямого управления со стационарными нелинейностями.

5 Проведено исследование устойчивости РДС по Пуассону и по Лагранжу.

Данный отчет представляет исследования, охватывающие теорию обратных задач стохастических дифференциальных систем и теорию устойчивости Ляпунова и близкие к ней области, имеющие в последние годы широкое применение при изучении сложных нелинейных процессов. Полученные результаты могут быть использованы в конкретных исследованиях в смежных науках. Высокий уровень выполненных научно-исследовательских работ характеризуется участием исполнителей темы в ряде международных конференций, а также публикациями в авторитетных математических журналах, которые приведены в Приложении А - в списке опубликованных работ настоящего отчета.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Галиуллин А.С. Методы решения обратных задач динамики. – М.: Наука, 1986. – 224 с.
2. Мухарлямов Р.Г. О построении систем дифференциальных уравнений движения механических систем // Дифференциальные уравнения. – М., 2003. – Т. 39, № 3. – С. 343-353.
3. Еругин Н.П. Построение всего множества систем дифференциальных уравнений, имеющих заданную интегральную кривую // Прикладная математика и механика. – М., 1952. – Т.10, вып. 6. – С. 659-670.
4. Галиуллин А.С. К задаче построения систем программного движения // Автоматика и телемеханика. – 1970. – № 3. – C. 32-37.
5. Галиуллин А.С. К задаче построения систем дифференциальных уравнений // Дифференциальные уравнения. – М., 1970. – Т.6, № 8. – С.1343-1348.
6. Мухарлямов Р.Г., Киргизбаев Ж.К. Управление программным движением и обратные задачи динамики систем с переменной массой. – Шымкент: Нурлы Бейне, 2008. – 180 с.
7. Мухаметзянов И.А., Мухарлямов Р.Г. Уравнения программных движений. – М.: Изд-во РУДН, 1986. – 88 с.
8. Мухарлямов Р.Г., Абрамов Н.В. Управление движением по заданной кривой и обратные задачи динамики // Вестник Российского университета дружбы народов. Серия математика, информатика, физика. – 2011. – № 2. – С. 104-110.
9. Карачанская Е.В. Построение программных управлений динамической системы на основе множества ее первых интегралов // Современная математика. Фундаментальные направления. – М., 2011. – Т. 42. – С. 125-133.
10. Будочкина С.А. О представлении одного операторного уравнения с первой производной по времени в форме -гамильтонова уравнения // Дифференциальные уравнения. – М., 2013. – Т. 49, № 2. – С. 175-185.
11. Галиуллин А.С. Системы Гельмгольца. – М.: Наука, 1995. – 86 с.
12. Галиуллин А.С. Избранные труды в двух томах. – М.: РУДН, 2009. – Т. I, II. – 462с.
13. Гельмгольц Г. О физическом значении принципа наименьшего действия // Вариационные принципы механики. – М., 1959. – С. 430-459.
14. Суслов Г.К. О кинетическом потенциале Гельмгольца // Математический сборник. – 1896. – Т.19, № 1. – С. 197-210.
15. Mayer A. Die existenzbeingungen eines kinetischen potentiales // Ber. Verhand. Kgl. Sachs. Ges. Wiss. Leipzig. – 1896. – Vol. 48. – C. 519-529.
16. Santilli R.M. Foundations of Theoretical Mechanics. I. The Inverse Problem in Newtonian Mechanics. – New York: Springer-Verlag, 1978. – 266 p; II. Birkhoffian Generalization of Hamiltonian Mechanics. – New York: Springer-Verlag, 1983. – 370 p.
17. Филиппов В.М., Савчин В.М., Шорохов С.Г. Вариационные принципы для непотенциальных операторов // Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. Новейшие достижения /ВИНИТИ. – М., 1992. – Т. 40. – С. 3-178.
18. Галиуллин А.С. Устойчивость движения. – М.: Наука, 1973. – 104 с.
19. Мухаметзянов И.А. Об устойчивости программного многообразия // Дифференциальные уравнения. – М., 1973. – Т.9, № 5. – С. 846-856.
20. Мухарлямов Р.Г. О построении множества систем дифференциальных уравнений устойчивого движения по интегральному многообразию // Дифференциальные уравнения. – М., 1969. – Т.5, № 4. – C. 688-699.
21. Тлеубергенов М.И. Необходимые и достаточные условия устойчивости интегрального многообразия // Дифференциальные уравнения и обратные задачи динамики. – М.: Изд-во УДН, 1983. – С. 125-132.
22. Соколов А.В. Об условиях асимптотической устойчивости движения трехзвенного управляемого электромеханического манипулятора // Проблемы механики и управления: Нелинейные динамические системы. – 2009. – № 41. – С. 156-172.
23. Мухарлямов Р.Г., Матухина О.В. Моделирование процессов управления, устойчивость и стабилизация //Вестник Казанского технологического университета. – 2012. – Т. 15, № 12. – С. 220-224.
24. Азимов Д.М., Мухарлямов Р.Г. Аналитический синтез экстремальных траекторий и устойчивость программного движения // Вестник Российского университета дружбы народов. Серия математика, информатика, физика. – 2012. – № 4. – С. 87-95.
25. Хасьминский Р.З. Устойчивость систем дифференциальных уравнений при случайных возмущениях их параметров. – М.: Наука, 1969. – 368 c.
26. Сагиров П. Стохастические методы в динамике спутников // Механика. Период. сб. переводов иностр. статей. – М., 1974. – № 5(147). – С.28-47.
27. Синицын И.Н. О флуктуациях гироскопа в кардановом подвесе // Известия АН СССР. Механика твердого тела. – М., 1976. – № 3. – С. 23-31.
28. Пугачев В.С., Синицын И.Н. Стохастические дифференциальные системы. Анализ и фильтрация. – М.: Наука, 1990. – 632 с.
29. Ватанабэ С., Икэда Н. Стохастические дифференциальные уравнения и диффузионные процессы. М., 1986. 445 с.
30. Уиттекер Е.Т. Аналитическая динамика. М.-Л., 1937. 500 с.
31. Тлеубергенов М.И. К обратной задаче ньютоновой механики в вероятностной постановке //Деп. в ВИНИТИ от 14.02.92. – №499. – Вып 92. – 54 с.
32. Тлеубергенов М.И. К вопросу разрешимости стохастической задачи Гельмгольца //Изв. МН–АН РК. Сер. физ.–мат. –1996. – №3. – С. 53–63.
33. Галиуллин А.С. Задачи построения функций сравнения в теории устойчивости движения // Дифференциальные уравнения. – 1974. – Т. 10, № 8. – С. 1527-1529.
34. Галиуллин А.С., Мухаметзянов И.А., Мухарлямов Р.Г. Обзор исследований по аналитическому построению систем программного движения // Вестник РУДН. – 1994. – № 1. – С. 5-21.
35. Майгарин Б.Ж. Устойчивость и качество процессов нелинейных систем автоматического управления. – Алма-Ата: Наука, 1980. – 115 с.
36. Жуматов С.С. , Крементуло В.В., Майгарин Б.Ж. Второй метод Ляпунова в задачах устойчивости и управление движением. – Алматы: Fылым, 1999. – 143 с.
37. Zhumatov S.S. Stability of a program manifold of control systems with locally quadratic relationsw // Ukrainian mathematical journal. – 2009. – Vol. 61, No 3. – P. 500-509.
38. Zhumatov S.S. Exponential stability of a program manifold of indirect control systems // Ukrainian mathematical journal. – 2010. – Vol. 62, No 6. – P. 907-915.
39. Tleubergenov M.T. On the inverse stochastic reconstruction problem // Differential equations. – 2014. – Vol. 50, No 2. – P. 274-278.
40. Mukharlyamov R.G. Simulation of Control Processes, Stability and Stabilization of Systems with Program Contraints // Journal of Computer and Systems Sciences International. – 2015. – Vol. 54, No 1. – P. 13-26.
41. Tleubergenov M.T., Ibraeva G.T. On the restoration problem with degenerated diffusion// TWMS Journal of pure and applied mathematics. – 2015. – Vol. 6, Issue 1. – P. 93-99.
42. Vasilina G.K., Tleubergenov M.T. Solution of the problem of stochastic stability of an integral manifold by the second Lyapunov method // Ukrainian mathematical journal. –2016. Vol. 68, No 1. – P. 14-28.
43. Llibre J., Ramirez R. Inverse Problems in Ordinary Differential Equations and Applications. – Switzerland: Springer International Publishing, 2016. – 165 p.
44. Zhumatov S.S. On an instability of the indirect control systems in the neighborhood of program manifold // Математический журнал. – 2017. – Т. 17, № 1. – С.91-97.
45. Zhumatov S.S. Frequently conditions of convergence of control systems in the neighborhoods of program manifold // Journal of Mathematical Sciences. – 2017. Vol. 226, No 3. – P. 260-269. http://DOI 10.1007/s10958-017-3532-z.
46. Zhumatov S.S. On instability of a program manifold of basic control systems // Springer Proceedings in Mathematics & Statistics. – Springer, 2017. – Vol. 216. – P. 467-474.
47. Красносельский М.А. Оператор сдвига по траекториям дифференциальных уравнений. – М.: Наука, 1966. – 331 c.
48. Красносельский М.А., Забрейко П.А. Биометрические методы нелинейного анализа. – М.: Наука, 1975. – 512 c.
49. Немыцкий В.В., Степанов В.В. Качественная теория дифференциальных уравнений. – М.: Гиттл, 1949. – 550 c.
50. Сибирский К.С. Введение в топологическую динамику. – Кишинев, 1970. – 144 c.

ПРИЛОЖЕНИЕ А

Список публикаций

1 Vasilina G. K., Tleubergenov M.I. On the optimal stabilization of an integral manifold // Journal of Mathematical Sciences. – 2018. – Vol. 229, No. 4. – Pp. 390-402. http://DOI 10.1007/s10958-018-3684-5. (SCOPUS).

2 Жуматов С.С. Абсолютная устойчивость программного многообразия систем непрямого управления с разрывными нелинейностями // Известия Междунар. казахско-турецкого университета им. Х.А. Ясави. Серия математикм, физика, информатика. Спец. выпуск по материалам конф. математиков Казахстана «Актуальные проблемы математики». – 2018. – Т. I, № 1(4). – С. 46-50.

 3 Тлеубергенов М.И., Ибраева Г.Т. О разрешимости обратной задачи замыкания стохастических дифференциальных систем // Известия Междунар. казахско-турецкого университета им. Х.А. Ясави. Серия математика, физика, информатика. Спец. выпуск по материалам конф. математиков Казахстана «Актуальные проблемы математики». – 2018. – Т. I, № 1(4). – С. 140-144;

4 Бапаев К.Б., Василина Г.К., Сламжанова С.С. О существовании m-параметрических суммируемых многообразий для разностно-динамических систем // Математический журнал. – 2018. –Т. 18, № 2(68). – С. 19-30.

1. Ажымбаев Д., Тлеубергенов М. О построении силовой функции в вероятностной постановке // Дифференциальные операторы и моделирование сложных систем: тез. докл. традиционной междунар. науч. апрельской конф. ИМММ. – Алматы, 2018. – С. 37-38.

6 Zhumatov S. Stability of a program manifold of nonautomous basic control systems // Дифференциальные операторы и моделирование сложных систем: тез. докл. традиционной междунар. науч. апрельской конф. ИМММ. – Алматы, 2018. – С. 34-35.

1. Бапаев К., Сламжанова С. О существовании суммируемых многообразий для разностно-динамических систем // Дифференциальные операторы и моделирование сложных систем: тез. докл. традиционной междунар. науч. апрельской конф. ИМММ. – Алматы, 2018. – С. 41-42.
2. Тлеубергенов М.И., Ажымбаев Д.Т. О разрешимости обратной стохастической задачи построения силовой функции // Матер. междунар. науч. конф. по дифференциальным уравнениям «Еругинские чтения-2018». – Минск, 2018. – С. 108-109.
3. Zhumatov S.S. Stability of a program manifold of basic control systems // Матер. междунар. науч. конф. по дифференциальным уравнениям «Еругинские чтения-2018». – Минск, 2018. – С. 139-140.
4. Tleubergenov M., Azhymbaev D.. On stochastic inverse problem of construction of the force function // Abstracs of the International Scientific Conference “Mathematical Analysis, Differential Equations & Applications, MADEA 8. – Cholpon-Ata, 2018. – P. 126-127.
5. S. Zhumatov. Stability of a program manifold of non-autonomous basic control systems // Abstracs of the International Scientific Conference “Mathematical Analysis, Differential Equations & Applications, MADEA 8. – Cholpon-Ata, 2018. – P. 130-131.
6. Vassilina G., Tleubergenov M. On construction of the set of comparison functions of the program motion in the probable statement // Fourth International Conference on Analysis and Applied Mathematics: the abstract book of the conference ICAAM 2018. – Turkey, 2018. – P. 177.
7. Tleubergenov M.I., Ibraeva G.T. On solving of the stochastic Helmholtz problem by the method of additional variables of Liouville // Современные проблемы математики и ее применение в естественных науках и информационных технологиях: материалы междунар. науч. конф., посв. 50-летию факультета математики и информатики Черновецкого национального университета имени Ю. Федьковича. – Черновцы, 2018. – С. 40.
8. Zumatov S. Stability of a program manifold of non-autonomous control systems // Современные проблемы математики и ее применение в естественных науках и информационных технологиях: материалы междунар. науч. конф., посв. 50-летию факультета математики и информатики Черновецкого национального университета имени Ю. Федьковича. – Черновцы, 2018. – С. 42.
9. Василина Г.К., Тлеубергенов М.И. О построении стохастических дифференциальных уравнений и функций сравнения по заданному интегральному многообразию // Дифференциальные уравнения и смежные проблемы: материалы междунар. науч. конф. – Стерлитамак, 2018. – С. 318-319.
10. Жуматов С.С. Абсолютная устойчивость программного многобразия основной теоремы управления с разрывными нелинейностями // Информатика и прикладная математика: матер. III Междунар. науч. конф. Часть 1. – Алматы, 2018. – С. 130-138.
11. Тлеубергенов М.И.. Василина Г.К. О построении множества функций сравнения программного движения в вероятностной постановке // Информатика и прикладная математика: матер. III Междунар. науч. конф. Часть 1. – Алматы, 2018. – С. 164-169.

ПРИЛОЖЕНИЕ Б

Календарный план







