Министерство образования и науки Республики Казахстан

ЮЖНО-КАЗАХСТАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

ИМ. М. АУЭЗОВА

УДК 517.927.25; 517.954

№ госрегистрации 0118РК00448

Инв.№

УТВЕРЖДАЮ

И.о. проректора по НР и МС

ЮКГУ им. М. Ауэзова  
 \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_У.С. Сулейменов  
 «\_\_\_»\_\_\_\_\_\_\_\_\_ 2019 г.

ОТЧЕТ   
О НАУЧНО-ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКОЙ РАБОТЕ

по теме:

AP05131225 БАЗИСНЫЕ СВОЙСТВА СОБСТВЕННЫХ ВЕКТОРОВ ОДНОМЕРНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ С ИНВОЛЮЦИЕЙ

(промежуточный)

Научный руководитель Әбдіжаһан М. Сәрсенбі  
доктор физ.-мат. наук, гнс \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_

Шымкент 2019

СПИСОК ИСПОЛНИТЕЛЕЙ

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Руководитель темы, доктор физ.-мат.наук, ГНС | \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ подпись, дата | Әбдіжаһан М. Сәрсенбі (все подразделы) |
| Исполнители темы  Ведущий научный сотрудник, к.ф.-м.н. | \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ подпись, дата | Л.В. Крицков (подраздел 1. 3 ) |
| Младший научный сотрудник | \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ подпись, дата | Ә.Ә. Сәрсенбі ( подразделы 1.1;1.2 ) |
| Нормоконтроль | \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ подпись, дата | А.А. Кынатова |

РЕФЕРАТ

Есeп 56 б., 36 әдебиет, 2 қосымша.

МЕНШІКТІ ФУНКЦИЯ, РИСС БАЗИСІ, БИОРТОГОНАЛДЫ ЖІКТЕУЛЕР, ИНВОЛЮЦИЯСЫ БАР ДИФФЕРЕНЦИАЛДЫ ТЕҢДЕУЛЕР, ГРИН ФУНКЦИЯСЫ

Зерттеу нысаны ретінде инволюциясы бар екіншіі ретті дифференциалды операторлар үшін спектралдық есептер қарастырылған.

Жұмыстың мақсаты – инволюциясы бар екінші ретті дифференциалды операторлардың меншікті функциялар жүйесінің базистік қасиеттерін зерттеу.

Зерттеу әдістері – дифференциалды теңдеулер теориясының аналитикалық тәсілдері, гильберт кеңістігіндегі сызықты операторлардың абстрактілі теориясының, дифференциалды операторлар теориясының, функционалды анализдің, сандар теориясының тәсілдері. Алынған нәтижелер. Шеттік шарттары Нейман түрінде болатын айнымалы коэффициенті бар жартылай шенелген инволюциясы бар екінші ретті дифференциалды операторлардың меншікті функциялар жүйесінің базис болатындығы туралы теоремалар. Инволюциясы бар параболалық, гиперболалық және эллипстік түрдегі теңдеулер үшін аралас есептердің шешімділігі көрсетілген. Инволюциясы бар гиперболалық түрдегі кейбір дербес туындылы теңдеулер үшін аралас есептің корректілі емес болатындығы талқыланған. Қосымша алынған функциялар саны шексіз көп болатын инволюциясы бар екінші ретті дифференциалды оператор мысалы құрастырылып, оның түпкілікті векторлар жүйесінің базис болатындығы анықталған.

Зерттеу нәтижелері өз өзіне түйіндес емес дифференциалды операторлардың спектралды теориясында, инволюциясы бар дербес туындылы дифференциалды теңдеулер теориясында, әрқилы қолданбалы есептерде жүзеге асырылуы мүмкін.

РЕФЕРАТ

Отчет 56 с., 36 источников, 2 прил.

СОБСТВЕННАЯ ФУНКЦИЯ, БАЗИС РИССА, БИОРТОГОНАЛЬНЫЕ РАЗЛОЖЕНИЯ, ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ С ИНВОЛЮЦИЕЙ, ФУНКЦИЯ ГРИНА

Объектом исследования являются спектральные задачи для дифференциальных операторов второго порядка с инволюцией.

Цель работы – исследование базисных свойств дифференциальных операторов второго порядка с инволюцией.

В исследованиях использованы аналитические методы теории дифференциальных уравнений, методы абстрактной теории линейных операторов и теории линейных дифференциальных операторов в гильбертовом пространстве, методы функционального анализа, теории чисел.

Полученные результаты. Доказаны теоремы о базисности собственных функций полуограниченных дифференциальных операторов второго порядка с инволюцией при краевых условиях типа Неймана. Показаны разрешимость смешанных задач для уравнений параболического, гиперболического и эллиптического типов с инволюцией. Обсуждаются некорректность смешанных задач для некоторых уравнений гиперболического вида с инволюцией. Построен пример дифференциального оператора второго порядка с инволюцией с бесконечным числом присоединенных функций, доказана теорема о базисности систем корневых функций.

Результаты исследований могут быть использованы в спектральной теории несамосопряженных дифференциальных операторов, в теории дифференциальных уравнений в частных производных с инволюцией, а также в различных прикладных задачах.

|  |
| --- |
| СОДЕРЖАНИЕ |
|  |
| |  | | --- | | ОСНОВНАЯ ЧАСТЬ ………………………………………………………………….. 8 | | |  |  |  |  |  | | --- | --- | --- | --- | --- | | 1 | Базисные свойства собственных функций дифференциальных операторов второго порядка с инволюцией с краевыми условиями Неймана................................................................................................................. | | | 8 | | 1.1  1.1.1  1.1.2  1.1.3  1.1.4  1.1.5  1.1.6  1.2  1.2.1  1.2.2  1.2.3  1.3 | Базисность собственных функций полуограниченного дифференциального оператора второго порядка с инволюцией с краевыми условиями Неймана и их применение в вопросах разрешимости смешанных задач для параболического, гиперболического и эллиптического уравнений, возмущенных инволюцией ……………………………………………………..  Функция Грина краевой задачи Неймана с инволюцией ……………………..  Собственные функции краевой задачи Неймана с постоянными коэффициентами ………………………………………………………………...  Оценка функции Грина …………………………………………………….......  Теоремы о равносходимости и базисности собственных функций краевой задачи Неймана с переменными коэффициентами ………………………………………..  Положительность собственных значений краевой задачи Неймана Абсолютная и равномерная сходимость ряда Фурье по собственным функциям краевой задачи Неймана…………………………………………….  Разрешимость смешанных задач с инволюцией …………………………….  Существование и единственность решения смешанных задач для уравнения параболического вида с инволюцией ……………………………  Существование и единственность решения смешанных задач для уравнения гиперболического вида с инволюцией ……………………………  Об обратной задаче для параболического уравнения дробного порядка с инволюцией …………………………………………………………………………..  Спектральная задача с бесконечным числом присоединенных функций  ЗАКЛЮЧЕНИЕ……………………………………………………………….  СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ…………………………  ПРИЛОЖЕНИЕ А……………………………………………………………..  ПРИЛОЖЕНИЕ B ……………………………………………………………. | | | 8  9  12  14  16  23  23  26  26  29  31  43  45  47  50  52 | |  | |  | |  | |  | | |

ВВЕДЕНИЕ

Цель работы – исследование базисных свойств систем собственных функций спектральной задачи для одномерного дифференциального оператора второго порядка с инволюцией и с переменным коэффициентом с краевыми условиями Неймана.

Задачи исследований:

- показать, что собственные значения изучаемой спектральной задачи с краевыми условиями типа Неймана положительны;

- построить функции Грина краевых задач рассматриваемого типа с нулевым потенциалом с краевыми условиями Неймана;

- получить оценки норм корневых функций и их производных;

- показать, что собственные функции спектральной задачи с краевыми условиями типа Неймана образуют базис пространства .

Исследования по данному проекту проводились согласно календарному плану в заявке на участие в конкурсе.

Запланированные на отчетный период исследования полностью завершены. По результатам исследований в рамках проекта опубликованы 12 работ. Из них 3 работы в журналах с импакт-фактором по базе и 1 работа в журнале из базы Scopus, 2 работы в зарубежном журнале c импакт-фактором РИНЦ, 6 работ в тезисах докладов международных конференций. Список основных опубликованных работ по результатам настоящего проекта приведены в приложении А. Приложение В содержит календарный план выполнения заданий проекта.

Основными результатами исследований по данному проекту являются:

1) создание теории функции Грина одномерного дифференциального оператора второго порядка с инволюцией c краевыми условиями Неймана;

2) построение функции Грина одномерного дифференциального оператора второго порядка с инволюцией c краевыми условиями Неймана;

3) теоремы о базисности и безусловной базисности в пространстве  собственных функций и равносходимости разложений произвольной функции из класса  по собственным функциям одномерных дифференциальных операторов второго порядка с инволюцией с краевыми условиями Неймана;

4) равномерная сходимость разложений по собственным функциям одномерных дифференциальных операторов второго порядка с инволюцией с краевыми условиями Неймана;

5) теоремы о существовании и единственности решений смешанных задач для уравнений параболического, гиперболического и эллиптического типов с инволюцией в случае краевых условий типа Неймана;

6) теорема о базисности в классе  собственных и присоединенных функций дифференциального оператора второго порядка с инволюцией, обладающей бесконечным числом присоединенных функций .

Отчет состоит из одного раздела и трех подразделов. В первом подразделе излагаются теория функции Грина одномерных дифференциальных операторов второго порядка с инволюцией с краевыми условиями Неймана, основные результаты о равносходимости, базисности и безусловной базисности собственных функций дифференциального оператора второго порядка с инволюцией с краевыми условиями Неймана. Во втором подразделе приведены результаты исследований о разрешимости смешанных задач для уравнений параболического, гиперболического и эллиптического типов с инволюцией с краевыми условиями типа Неймана. Доказаны теоремы о существовании и единственности решения прямых и некоторых обратных задач методом Фурье. В третьем подразделе построен пример дифференциального оператора второго порядка с инволюцией с бесконечным числом присоединенных функций. Проведен полный спектральный анализ задачи. Доказана теорема о базисности в классе  корневых функций спектральной задачи.

ОСНОВНАЯ ЧАСТЬ

1 Базисные свойства собственных функций дифференциальных операторов второго порядка с инволюцией

1.1 Базисность собственных функций полуограниченного дифференциального оператора второго порядка с инволюцией с краевыми условиями Неймана их применение в вопросах разрешимости смешанных задач для параболического, гиперболического и эллиптического уравнений, возмущенных инволюцией

Этот подраздел посвящен исследованию спектральных свойств дифференциальных операторов второго порядка с инволюцией. Важное место в спектральной теории дифференциальных операторов занимает вопрос базисности собственных функций. Решение вопроса базисности собственных функций позволяет использовать метод Фурье при решений различных задач для уравнений в частных производных. Метод Фурье использован в работах [1, 2] при изучений обратных задач для дифференциальных уравнений в с инволюцией, в работе [3] при исследовании поведения решений уравнения в частных производных с инволюцией. Теории функции Грина дифференциальных уравнений с инволюцией посвящены работы [4,5]. Исследованию спектральных свойств дифференциальных операторов с инволюцией посвящены работы [6-18]. Вопросы разрешимости задач для дифференциальных уравнений в частных производных с инволюцией рассмотрены в работах [19 - 21].

В настоящей работе дано обоснование метода Фурье для решения смешанных задач для уравнений параболического, гиперболического и эллиптического видов с инволюцией с краевыми условиями типа Неймана. В промежуточном отчете за 2018 год по настоящему проекту перечисленные задачи были изучены в случае краевых условий Дирихле. Нужно отметить, что при исследованию поставленных задач существенную трудность вызывают вопрос построения функции Грина одномерных краевых задач.

Решению этого вопроса в случае классических уравнений посвящены работы В.А. Стеклова [22], В.А. Ильина [23]. Дальнейшее развитие метода Фурье, связанное с понижением требований гладкости начальных данных, имеется в работах В.А. Чернятина [24], А.П. Хромова [25].

В области  рассматривается смешанная задача для уравнения параболического вида





Уравнение (1) содержит преобразование инволюции. Параметр  удовлетворяет условию , функция  непрерывна на отрезке  . Если система собственных функций спектральной задачи

 (3)

то ряд

 (4)

является формальным решением смешанной задачи (1), (2). Выполнение условия



требует решения вопроса разложения начальной функции в ряд по собственным функциям.

1.1.1 Функция Грина краевой задачи Неймана с инволюцией

Рассмотрим краевую задачу

 (5)

Функции

,

являются линейно независимыми решениями однородного уравнения (5).

Функцией Грина краевой задачи (5) назовем такую функцию , что функция



является решением краевой задачи

, (6)

где - непрерывная функция. Справедлива следующая

Теорема 1. Если λ не является собственным значением однородной краевой задачи (5), то краевая задача (6) разрешима для любой непрерывной функции  и ее решение представимо в виде



где



Доказательство теоремы проводится непосредственной проверкой. Так как функции , линейно независимые решения однородного уравнения (5), то достаточно показать, что функция









удовлетворяет неоднородной краевой задаче (6). Вычислим производные функции функции 







Вторая производная имеет вид







.

Полученное выражение для функции  подставляем в уравнение (6). В итоге получим тождество. Выполнение краевых условий проверяется непосредственным вычислением. Теорема доказана.

Из теоремы 1 вытекает важное

Следствиe. Функция Грина краевой задачи (5) имеет вид



Отметим, что построение функции Грина является непростой задачей, играет важную роль при исследовании краевых задач. В основе метода Биркгофа-Тамаркина, разработанного для исследования вопросов сходимости разложений по собственным функциям обыкновенных дифференциальных операторов, лежит оценка функции Грина изучаемого оператора. Построенная функция Грина позволяет перенести теорию Биркгофа-Тамаркина на случай изучаемых нами дифференциальных операторов с инволюцией.

1.1.2 Собственные функции краевой задачи Неймана с постоянными коэффициентами

В работе [14] исследована спектральная задача (5), которая имеет две серии собственных значений

.

Было установлено, что система собственных функций вида



образует ортонормированный базис пространства.

С помощью выписанной функции Грина можно написать, разложение произвольной функции  из класса  по собственным функциям спектральной задачи (5).

Полюсами функции Грина служат нули функций .

Заметим, что если если число  не является четным, то все собственные значения однократны. И при выполнении этого условия возможно применение теории Биркгофа-Тамаркина.

В комплексной плоскости рассмотрим окружности 

c общим центром в начале координат:



Эти окружности не пересекаются и не проходят через точки . При  окружности, соответственно переходят в окружности  в комплексной - плоскости.

Для любой функции  частичные суммы разложения по собственным функциям спектральной задачи (1) можно записать в виде [3]





Далее меняем порядок интегрирования и для вычисления интеграла по окружности  используем теорему о вычетах.



Таким образом, частичные суммы разложения по собственным функциям спектральной задачи (5) произвольной суммируемой функции  имеют вид

, (7)

где

 .

Система   является полной ортонормированной системой в пространстве . Поэтому для  частичные суммы  вида (7) сходятся к функции  в смысле нормы пространства .

1.1.3 Оценка функции Грина**.**

В дальнейшем нам понадобится оценка функции Грина. В случае краевых условий типа Дирихле оценка функции Грина была установлена в промежуточном отчете по данному проекту за 2018 год.

Пусть , шар достаточно малого радиуса .

Лемма 1. Если  и , то для функции Грина  краевой задачи (5) справедлива следующая равномерная оценка



при  , где

.

Доказательство. При  функцию Грина можно преобразовать к виду



Так как , то , . Поэтому



если  и



если .

Таким образом, при  функция Грина удовлетворяет следующей оценке



В случае  аналогичным образом получаем оценку в виде



В случае  имеем оценку вида



Полученные оценки можно написать общем виде



Лемма доказана.

1.1.4 Теоремы о равносходимости и базисности собственных функций краевой задачи Неймана с переменными коэффициентами

Нас интересует вопрос о возможности разложения произвольной функции  в сходящийся ряд по собственным функциям спектральной задачи (3), с непрерывным комплекснозначным коэффициентом  на интервал . Сходимость разложения по собственным функциям спектральной задачи (3) произвольной функции  из класса  будет следовать из теоремы о равносходимости разложений по собственным функциям спектральных задач (3) и (5).

Обозначим через  функцию Грина задачи (3), а через  - функцию Грина задачи (5). Так как, почти всюду на интервале (-1,1)





то



Функция  удовлетворяет краевым условиям (3). Поэтому вне полюсов функций  и  имеет место представление

 (8)

Мы покажем существование решения интегрального уравнения (8). Это решение будет функцией Грина краевой задачи (5). Причем, для нее выполняется та же оценка в утверждении леммы 1. Этот факт также имеет важное значение для доказательства теоремы равносходимости. Справедлива следующая

Теорема 2. Если число  не является четным, то для всех достаточно больших  решение интегрального уравнения (8) cуществует.

Доказательство. Применяем метод итерации. Пусть  и

 (9)

для всех достаточно больших .

В силу доказанной леммы для функции Грина  краевой задачи (5) имеет место оценка

,

где



Соотношение (9) при  дает оценку



Для дальнейших выкладок введем следующие обозначения



 (10)

где максимум по  для фиксированного  и для достаточно больших , лежащих вне полюса функции  . Нам нужно показать справедливость оценки

 (11)

Для  оценка (11) следует из первого неравенства в (10). Предположим справедливость оценки (11) при  и докажем, что оценка(11) верна и при . Тогда из второго неравенства (10) выводим неравенство

 (12)

Распишем соотношение





По неравенству треугольника имеем



Неравенство



влечет оценку



а также, соотношение



влечет неравенство



Кроме того



Поэтому мы можем написать неравенство

.

Это неравенство вместе с неравенством (12) приводит к оценке



Для достаточно больших  можно считать

.

Следовательно, верна оценка



для любого , откуда следует справедливость оценки (11). Из доказанной оценки следует равномерная сходимость ряда



и последовательности его частичных сумм

.

Это означает равномерную сходимость последовательности  к предельной функции , которая удовлетворяет интегральному уравнению (8). Теорема доказана.

Пусть



частичные суммы разложения по собственным функциям спектральной задачи (5), где . Частичные суммы разложения по собственным функциям спектральной задачи (3) обозначим через



Последовательность  назовем равносходящимся с последовательностью на промежутке  если  равномерно на этом промежутке при 

Сформулируем теорему о равносходимости.

Теорема 3. Если число  не является четным, то для любой функции  последовательность  равносходится с последовательностью 

Доказательство. Рассмотрим разность частичных сумм разложений по собственным функциям спектральных задач (3) и (5)

 (13)

Из доказательства предыдущей теоремы следует, что



Применяя эту оценку, из равенства (8) получаем неравенство



Тогда из равенства (13) вытекает следующее неравенство





Если ввести обозначение

,

то будем иметь



Разобьем рассматриваемый интервал на две части , где





 достаточно малое число. Теперь мы можем переписать последнее неравенство в виде



(14)



Поскольку

,

то второе слагаемое в правой части (14) можно сделать меньшим чем  путем выбора числа . Обозначим через  радиус круга . Тогда из равенства





получим неравенство



Выбирая номер  достаточно большим, можно сделать первое слагаемое в (14)меньше чем . Теорема доказана.

Из доказанной теоремы немедленно следует базисность собственных функций спектральной задачи (3). Этот факт сформулируем в виде теоремы.

Теорема 4. Если число  не является четным, то система собственных функций спектральной задачи (3) образует базис пространства .

Доказательство. Пусть  норма элемента пространства . Тогда для любой функции 

.

Первое слагаемое меньше  в силу базисности собственных функций спектральной задачи (5), а второе слагаемое меньше  в силу теоремы 3 о равносходимости. Теорема 4 доказана..

Теперь сформулируем теорему о базисности собственных функций в самосопряженном случае.

Теорема 5. Если число  не является четным и коэффициент  уравнения (3) вещественная функция, то система собственных функций спектральной задачи (3) образует ортонормированный базис пространства .

Теорема 5 следует из самосопряженности спектральной задачи (3) при вещественном и теоремы 4.

Доказанная теорема 4 утверждает базисность собственных функций спектральной задачи (3). При этом остается неясным вопрос о виде этого базиса: будет ли данный базис безусловным базисом или базисом Рисса? По этому поводу мы можем утверждать следующее.

Теорема 6. Если число  не является четным, то всякий базис из собственных функций спектральной задачи (3) образует безусловный базис пространства .

Для доказательства заметим, что если выполнено условие теоремы, т.е. если система  собственных функций спектральной задачи (3) образует базис пространства , то всегда выполнена равномерная оценка

, (15)

где  - система, биортогонально сопряженная к системе , состоящая из собственных функций спектральной задачи, сопряженной к (3). А из работы Л.В. Крицкова и А.М. Сарсенби [26] известно, что в условиях спектральной задачи (3) условие (15) является необходимым и достаточным для безусловной базисности собственных функций спектральной задачи (3). Тем самым теорема 6 доказана.

1.1.5 Положительность собственных значений краевой задачи Неймана

Теорема 6. Если функция  на промежутке , то все собственные значения  спектральной задачи (3) положительны.

Доказательство. Умножим обе части уравнения



на  и полученное равенство проинтегрируем по промежутку . Тогда



В полученном равенстве внеинтегральные члены равны нулю в силу краевых условий. Допустим, что все . Тогда правая часть последнего равенства окажется отрицательным. Поэтому из последнего равенства получим неравенство

 .

К правой части применим неравенство . Тогда

.

Так как , то полученное противоречие доказывает теорему. Теорема 6 доказана.

1.1.6 Абсолютная и равномерная сходимость ряда Фурье по собственным функциям краевой задачи Неймана

Теорема 7. Если число  не является четным и коэффициент  уравнения (3) вещественная функция, то для любой дважды дифференцируемой функции, удовлетворяющей условиям , ряд Фурье

 (9)

по полной ортонормированной системе  собственных функций спектральной задачи (3) сходится абсолютно и равномерно.

Доказательство. По условию задачи (1), функция  имеет производную второго порядка и удовлетворяет условия . Перепишем уравнение (3) в виде

 .

Тогда коэффициенты  в разложении (9) можно преобразовать

 

Отсюда получим соотношение , где

.

Таким образом, ряд (9) можем записать в виде

 (10)

С другой стороны, хорошо известно, что краевая задача (3) эквивалентна интегральному уравнению



где  - функция Грина краевой задачи (3) при , которая является непрерывной при , и, следовательно, ограниченной функцией. Обозначим

. Тогда ряд (10) можно записать так

.

Так как , то

.

Величины  являются коэффициентами Фурье разложения по полной ортонормированной системе . Поэтому оба ряда в правой части последнего соотношения сходятся, причем второй ряд сходится при всех из данного промежутка и



в силу непрерывности и ограниченности функции Грин . Тем самым, из неравенства (10) вытекает утверждение теоремы.

1.2 Разрешимость смешанных задач с инволюцией

Полученные выше результаты позволяют показать существование и единственность решения смешанных задач для некоторых уравнений параболического, гиперболического и эллиптического видов с инволюцией методом разделения переменных.

1.2.1 Существование и единственность решения смешанных задач для уравнения параболического вида с инволюцией

В этом пункте докажем теорему о существовании и единственности решения смешанных задач для уравнения параболического вида с инволюцией.

В двумерной области  рассмотрим следующую смешанную задачу для уравнения параболического вида





Уравнение (1) содержит преобразование инволюции. Параметр  удовлетворяет условию , функция  непрерывна на отрезке  . Обозначим через  систему собственных функций спектральной задачи

 (3)

Теорема 8. Пусть выполнены следующие условия:

1) вещественная непрерывная функция  неотрицательна;

2) число  не является четным, .

Тогда для любой дважды дифференцируемой функции , удовлетворяющей условиям , решение смешанной задачи (1), (2) существует, единственно и представимо в виде ряда

. (4)

Доказательство. Для доказательства теоремы достаточно показать равномерную сходимость ряда (4) и рядов

,  (11)

. (12)

По теореме 6 все числа положительны. Поэтому  для любого  и . По теореме 7 ряд  сходится равномерно. Значит ряд (4) абсолютно и равномерно сходится. Далее, из , начиная с некоторого , следует равномерная сходимость ряда (11). Ряд (12) преобразуем следующим образом

 (13)

Ряды в правой части (13) сходятся абсолютно и равномерно при . Ряд в левой части (13) также сходится абсолютно и равномерно при . Отсюда следует абсолютная и равномерная сходимость ряда

 (14)

Ряд (14) умножим на число  и прибавим к ряду (13). Полученный ряд



также сходится абсолютно и равномерно при . Таким образом, ряды (4), (11), (12) сходятся абсолютно и равномерно при . Доказанное означает, что функция (4) удовлетворяет уравнению (1) и условиям (2).

Докажем единственность решения. Пусть существуют два решения  и  смешанной задачи (1) и (1). Тогда функция  удовлетворяет уравнению (1) и начальному условию



Умножив обе части уравнения (1) на функцию , проинтегрируем по переменной 





Полученное равенство проинтегрируем по переменной . Тогда получим





Применяя неравенство  и пользуясь не отрицательностью функции  и соотношением , мы получим неравенство

,

из которого следует . Теорема 8 доказана.

1.2.2 Существование и единственность решения смешанных задач для уравнения гиперболического вида с инволюцией

Теорему 8 можно перенести на случай уравнений гиперболического и эллиптического видов с инволюцией. Рассмотрим случай уравнения гиперболического вида с инволюцией. В двумерной области  рассмотрим смешанную задачу для уравнения гиперболического вида

 (15)

. (16)

Методом разделения переменных получаем следующие две задачи:

 (17)

; (18)

 (19)

. (20)

Обозначим через  систему собственных функций спектральной задачи (17), (18), соответствующих собственным значениям .

Решение уравнения (19) имеет вид . Решение смешанной задачи (15), (16) ищем в виде ряда

 (21)

Результаты, изложенные в подразделе 1, служат обоснованием для применения метода Фурье для этой смешанной задачи.

Справедлива следующая

Теорема 9. Пусть выполнены следующие условия:

1) вещественная непрерывная функция  неотрицательна;

2) число  не является четным, ,

3) начальные функции  дважды непрерывно дифференцируемы и удовлетворяют условиям , . Тогда решение смешанной задачи (15), (16) существует, единственно и представимо в виде ряда (21).

Для доказательства теоремы достаточно показать равномерную сходимость на отрезке  при  ряда (21) и следующих четырех рядов:

;

;

;

.

Несложно заметить, что равномерная сходимость выписанных рядов будет следовать из равномерной сходимости рядов

.

На доказательстве равномерной сходимости этих рядов мы не будем останавливаться, так как оно проводится по аналогии доказательств предыдущих утверждений.

Аналогичным образом можно сформулировать и доказать теорему существования и единственности смешанных задач для уравнения эллиптического вида с инволюцией.

1.2.3 Об обратной задаче для параболического уравнения дробного порядка с инволюцией

В настоящем подразделе рассматривается проблема моделирования процесса термодиффузии в замкнутой металлической проволоке, намотанной на тонкий лист изоляционного материала. В интегрально-дифференциальном уравнении, содержащем производную по времени дробного порядка



Проведенные исследования имеют тесную связь с результатами работ [29, с. 151-160], [30, с. 240], [31, с. 73-79], [33], [34].

Рассмотрим уравнение

 (22)

в области . Здесь  влияние внешнего источника, который не меняется со временем; является начальной точкой времени, а  является конечной. Производная  определена как



и называется производной порядка  в смысле Капуто, где  дробный интеграл в смысле Римана-Лиувилля



Производная Капуто позволяет нам рассматривать начальные условия естественным образом.

В качестве дополнительной информации мы берем значения одного начального и одного конечного условия температуры

 (23)

Поскольку провод замкнут, естественно предположить, что температура на концах провода всегда одинакова

 (24)

Рассмотрим процесс, в котором температура на одном конце в каждый момент времени  пропорциональна (дробной) скорости изменения среднего значения температуры по всему проводу. Затем,

 (25)

Здесь  коэффициент пропорциональности.

Таким образом, мы приходим к следующей математической обратной задаче: Найти правую часть ** уравнения субдиффузии (22) и его решение ** с учетом начальных и конечных условий (23), граничного условия (24) и условия (25).

Отметим, что данная задача в случае, когда  рассмотрена в [32, с. 1-8].

Условие (25) является нелокальной. Используя методику работы А.А. Самарского, мы преобразуем это условие. Учитывая уравнение (22) из (25), получим



Следовательно



Введем обозначения



Тогда в терминах новой функции мы получим следующую обратную задачу:

В области ** найти пару функций  и  удовлетворяющих уравнению

 (26)

начальному условию

 (27)

конечному условию

 (28)

и граничным условиям

 (29)

Здесь  и  заданные достаточно гладкие функции;  ненулевое действительное число такое, что  и 

Приведем определение решения рассматриваемой задачи.

*Определение 3.1.* Под регулярным решением обратной задачи (26)-(29) мы понимаем пару функций  класса   которые обращают уравнение (26) и условия (27)-(29) в тождество.

*Определение 3.2.* Под обобщенным решением обратной задачи (26)-(29) мы понимаем пару функций  класса , которые удовлетворяют уравнению. (26) и условиям (27)-(29) почти всюду.

Использование метода Фурье для решения задачи (26)-(29) приводит к спектральной задаче для оператора  задаваемой дифференциальным выражением

 (30)

и граничными условиями

 (31)

где  - спектральный параметр.

Предположим, что  Общее решение уравнения (30) мы можем представить в виде:



где  и - произвольные комплексные числа.

Выполняя граничные условия (31) для нахождения собственных значений, получаем уравнение



Следовательно, спектральная задача (30)-(31) имеет две серии собственных значений





с соответствующими нормированными собственными функциями, заданными в виде

 (32)

Здесь  - коэффициент нормировки



Легко видеть, что система (32) является одновременно системой собственных функций для оператора Штурма-Лиувилля



с самосопряженными граничными условиями (31), соответствующими собственным значениям



Следовательно, система (3.(22)) образует полную ортонормированную систему в , то есть является ортонормированным базисом пространства.

Пусть пара функций  является решением обратной задачи (26)-(29). Введем обозначения

 (33)

Мы применяем оператор  к  Затем, используя формулу (26), интегрируя по частям, мы получаем задачу

 (34)

 (35)

 (36)

Здесь мы используем обозначения



Легко видеть, что функция функция  является частным решением неоднородного уравнения (34). Используем общее решение однородного уравнения (34), построенное в ([35], с. 233) для  Объединяя их, мы получаем



где  обобщенная функция Миттаг-Леффлера ([35,с. 48]):

,

а константы  и  неизвестны. Чтобы найти эти константы, мы используем условия (35) и (36). Из (35) получаем единственное решение задачи Коши (34)-(35) в виде

 (37)

Поскольку , то в силу известной асимптотики [36, с. 3489-3550]

 (38)

при достаточно большом  оценка

 (39)

будет иметь место, в котором постоянная  не зависит от значений индексов .

Поэтому используя условие «окончательного переопределения» (36), получим

 (40)

*Лемма 3.1.* Если для всех значений индексов  выполнено условие (39), то решение  обратной задачи (26)-(29) единственно.

*Доказательство.* Предположим, что есть два решения  и  обратной задачи (26)-(29). Обозначим

.

Тогда функции  и  удовлетворяют уравнению (26), граничным условиям (29) и однородным условиям (27) и (28):





Поэтому, используя обозначения (33) из (40), находим



Так как



то это дает

 (41)

Так как , то для  из уравнения (41) имеем . Далее, так как ,



то равенство (41) возможно только при выполнении условия



Отсюда получаем  Поэтому, используя этот результат, из (37) и (40) находим

,

для всех значений индексов  для  и  для . Далее в силу полноты системы (3.(22)) в  получим

.

Единственность решения обратной задачи (26)-(29) доказана.

Далее, построим формальное решение задачи. Поскольку система собственных функций (3.(22)) образует ортонормированный базис в , неизвестные функции  и  можно представить в виде

 (42)

 (43)

где  и  неизвестные функции;  и  неизвестные постоянные.

Подставляя (42) и (43) в уравнение (26), получаем обратные задачи (34)-(36). Если константы  предполагаются заданными, то решения этих обратных задач существуют, являются единственными и представлены формулами (37) и (40). Подставляя (37) и (40) в ряды (42) и (43), получаем формальное решение обратной задачи (26)-(29).

Из анализа формулы (40) легко видеть, что формальное решение (42) задачи (26)-(29) образует сходящийся ряд тогда и только тогда, когда

 (44)

Как и выше, мы рассчитываем



где  и



Таким образом, (44) выполняется тогда и только тогда, когда  для

всех значений индексов . Это возможно только в случае

 (45)

В этом случае задачи (26)-(29) и (22)-(25) совпадают. Действительно, из (45) и уравнения (22) мы имеем



Для первого интеграла применяем условие (25) и вычисляем второй интеграл. Тогда мы получим



Это означает, что граничные условия (25) и (29) совпадают. Следовательно, задачи (26)-(29) и (22)-(25) также совпадают. Таким образом, в дальнейшем мы будем рассматривать задачу (22)-(24) с граничным условием

 (46)

Другими словами, в дальнейшем мы рассмотрим обратную задачу (22)-(24), (46).

Аналогично предыдущему, формальное решение этой задачи может быть построено в виде ряда





где



 (47)

Чтобы завершить наше исследование, необходимо, как и в методе Фурье, обосновать гладкость получаемых формальных решений и сходимость всех возникающих рядов.

Теперь мы приведем теорему о существования и единственности решения нашей обратной задачи.

*Теорема 3.2.* Пусть  и  такое, чтобы условие (29) выполнялось для всех значений индексов .

1. Пусть  и удовлетворяют граничным условиям (31). Тогда для вещественного числа  такого, что  обратная задача (22)-(24), (46) имеет единственное обобщенное решение, устойчивое по норме:



где постоянная  не зависит от .

1. Пусть  и функция ** и ** удовлетворяют граничным условиям (31), тогда для вещественного числа  такого, что  обратная задача (22)-(24), (46) имеет единственное регулярное решение.

*Доказательство***.** Оценки обобщенной функции Миттаг-Леффлера (38) и (29) известны. Поэтому из представлений (37)- (40) получаем оценки

 (48)

 (49)

где постоянная  не зависит от индексов  и от функций **Поскольку система собственных функций (3.(22)) образует ортонормированный базис в , то в силу равенства Парсеваля, из этого легко получить оценки

 (50)

 (51)

При выводе этих неравенств мы используем тот факт, что функции ** удовлетворяют граничным условиям (31). Теперь мы можем легко получить оценку для  из уравнения (26). Это вместе с (50) и (51) дает необходимую оценку для решения.

Из полученных оценок также следует, что в построенном нами формальном решении обратной задачи все ряды сходятся, они могут быть почленно дифференцированы, а ряды, полученные при дифференцировании, также сходятся в смысле метрики .

Из (42) и (49), используя неравенство Гельдера, легко обосновать неравенство



что оправдывает непрерывность  в замкнутой области Из представления решения в виде рядов (42), (43) и неравенств (48), (49) легко обосновать оценки

 (52)

Пусть  и функции ** и **удовлетворяют граничным условиям (31), тогда ряд чисел в правой части (52) сходится. Поэтому в таком случае построенное нами формальное решение дает правильное решение обратной задачи (26)-(29). Теорема полностью доказана.

1.3 Спектральная задача с бесконечным числом присоединенных функций

В промежуточном отчете за 2018 год проведен полный спектральный анализ задачи

 (53)

где , в которой дифференциальное выражение содержит преобразование инволюции независимой переменной в старшей производной, а краевые условия носят нелокальный характер. Показано, что если  иррационально, то система собственных функций полна и минимальна в , но не является базисом. В случае рационального  указан способ выбора присоединенных функций, при котором система корневых функций задачи образует безусловный базис в . Спектральная задача наряду с собственными функциями содержит бесконечно много присоединенных функций.

Тем самым установлено, что задача (53) обладает всеми характерными чертами существенно несамосопряженных задач и ее спектральные свойства могут коренным образом меняться при сколь угодно малых изменениях параметра

За отчетный период задача (53) рассмотрена в пространстве . Основной результат подраздела содержится в следующих теоремах.

Теорема 1. Пусть число  иррационально и . Тогда система корневых функций задачи (1.1) содержит только собственные функции, причем она полна и минимальна в , но не образует базиса в этом пространстве.

Теорема 2. Пусть число  рационально и . Тогда спектр задачи (1.1) распадается на две последовательности:  при этом для каждого  имеется только одна собственная функция, а для каждого  - одна собственная и одна присоединенная функции. Система корневых функций полна и минимальна в  и присоединенные функции можно выбрать так, чтобы вся система образовывала безусловный базис в .

Отметим, что функционально-дифференциальные уравнения, подобные уравнению (53) исследовались многими авторами. Алгебраические и аналитические аспекты теории обыкновенных дифференциальных уравнений с инволюцией обсуждались в [4, 5]. Спектральные вопросы, возникающие в связи с дифференциальными операторами с инволюцией, затрагивались для операторов первого порядка в [6 – 9, 10 – 12] и для операторов второго порядка в [13 – 18].

Полные доказательства теорем 1 и 2 опубликованы в научном журнале с импакт-фактором (см. Приложение А). В связи с ограниченностью количества страниц промежуточного отчета доказательства сформулированных теорем мы опускаем.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В отчете изложены результаты исследований базисных свойств собственных функций дифференциальных операторов второго порядка с инволюцией. Получены следующие результаты:

- построена функция Грина полуограниченных одномерных дифференциальных операторов второго порядка с инволюцией с краевыми условиями Дирихле;

- доказаны теоремы о равносходимости разложений по собственным функциям одномерных дифференциальных операторов второго порядка с инволюцией с краевыми условиями Дирихле;

- доказаны теоремы о базисности и безусловной базисности собственных функций одномерных дифференциальных операторов второго порядка с инволюцией с краевыми условиями Дирихле в пространстве;

- доказаны теоремы о существовании и единственности решения смешанных задач для уравнений параболического, гиперболического и эллиптического видов с инволюцией с краевыми условиями Дирихле;

- установлена некорректность смешанной задачи для уравнения параболического вида с инволюцией с неполуограниченным оператором;

- найдены классы однозначной разрешимости смешанной задачи для уравнения параболического вида с инволюцией с неполуограниченным оператором в терминах начальных данных;

- построен пример одномерного дифференциального оператора второго порядка с инволюцией с бесконечным числом присоединенных функций;

- доказана базисность Рисса собственных и присоединенных функций построенного примера в пространстве квадратично суммируемых функций;

Полученные результаты служат обоснованием для применения метода Фурье к начально – краевым задачам в случае уравнений в частных производных с инволюцией. В случае оператора двукратного дифференцирования с инволюцией решена одна из важных задач - задача построения функции Грина задачи Дирихле. Из явного вида функции Грина видно ее существенное отличие от случая обыкновенного дифференциального оператора. Построенные функции Грина использованы при доказательстве теорем о равносходимости разложений по собственным функциям одномерных дифференциальных операторов второго порядка с инволюцией с краевыми условиями Дирихле. Для дифференциальных уравнений в частных производных параболического вида с инволюцией найдены некорректные задачи. Показаны классы разрешимости в терминах начальных данных.

Полученные результаты позволяют говорить о создании теории базисности корневых векторов дифференциальных операторов с инволюцией. Результаты могут найти применение в теории разрешимости дифференциальных уравнений в частных производных с инволюцией, при решении обратных задач и др.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1 Kirane M., Nasser A.S. Inverse problems for a nonlocal wave equation with an involution perturbation // J. Nonlinear Sci. Appl. – 2016. – Vol. 9. – P. 1243 – 1251.

2 Ahmad B., Alsaedi A., Kirane M., Tapdigoglu R.G. An inverse problem for space and time fractional evolution equations with an involution perturbation // Quaestiones Mathematicae. -

2 017. – Vol. 40, no. 2. – P. 151 – 160.

3 Wiener J. Generalized solutions of functional differential equations. – Singapore: World Sci. 1993. – P. 160 – 215.

4 Cabada A., Adrian F.Tojo. Existence results for a linear equation with reflection, non-constant coefficient and periodic boundary conditions // Journal of Mathematical Analysis and Application. – 2014. - V. 412, №1. – P. 529 – 546. – DOI: 10.1016/j.jmaa.

5 Cabada A., Adrian F. Tojo. Solutions and Green’s function of the first order linear equation with reflection and initial conditions // Boundary Value Problems. – 2014. – V. 99.

6 Бурлуцкая М.Ш., Хромов А.П. Обоснование метода Фурье в смешанных задачах с инволюцией // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. – 2011. – Т.11, №4. – C. 3 – 12.

7 Бурлуцкая М.Ш., Хромов А.П. Метод Фурье в смешанной задаче для уравнения с частными производными первого порядка с инволюцией // Ж. вычис. матем. и матем. физ. – 2011. – T.51, №12. – С. 2233 – 2246.

10 Kopzhassarova А. А., Lukashov A. L., Sarsenbi A. M. Spectral properties of nonself-adjoint perturbations for a spectral problem with involution *//* Abstr. Appl. Anal. – V. – 2012. – Article ID 590781. – P. 5.

11 Sadybekov M.A., Sarsenbi A.M., Mixed problem for a differential equation with involution under boundary conditions of general form // Edited by: Ashyralyev A; Lukashov A, in Book Series: AIP Conference Proceedings, 2012. – V. 1470. – P. 225 – 227.

12 Садыбеков М.А., Сарсенби А.М. Решение основных спектральных вопросов всех краевых задач для одного дифференциального уравнения первого порядка с отклоняющимся аргументом // Узбекский математический журнал. – 2007. - № 3. – C. 88 – 94.

13 Сарсенби А.М. [Безусловные базисы, связанные с неклассическим дифференциальным оператором второго порядка // Дифференциальные уравнения. –](http://elibrary.ru/item.asp?id=13726688) 2010. – T. 46, №4. – С. 506 – 511.

14 Kopzhasarova A.A, Sarsenbi A.M. Basis Properties of Eigenfunction of Second-Order Differential Operators with Involution // Abstract and Applied Analysis. – 2012. – V. 2012. – P. 6 – Article ID 576843. – DOI:10.1155/2012/576843.

15 Садыбеков М.А., Сарсенби А.М. Критерий базисности системы собственных функций оператора кратного дифференцирования с инволюцией // Дифференциальные уравнения. – 2012. – T. 48, №8. – С. 1126 – 1132.

16 Садыбеков М.А., Сарсенби А.М. О понятии регулярности краевых задач для дифференциального уравнения второго порядка с отклоняющимся аргументом // Математический журнал. – 2007. – Т.7, № 1(23). – С. 82 – 88.

17 Садыбеков М.А., Сарсенби А.М. Безусловная сходимость спектральных разложений, связанных с дифференциальным уравнением второго порядка с отклоняющимся аргументом // Вестник КазНУ.– 2006. № 2(49). – С. 48 – 54.

18 Sarsenbi A.M., Tengaeva A.A. [On the basis properties of root functions of two generalized eigenvalue problems](http://www.scopus.com/scopus/inward/record.url?eid=2-s2.0-84859756791&partnerID=K84CvKBR&rel=3.0.0&md5=fc08b31053c77f77bff026e232cadaa2) // Differential Equations. – 2012. – V 48, № 2. – P. 306 – 308.

19 Przevorska - Rolewicz D. Equations with transformed argument an Algebraic approach. – Warszawa, 1973. – 354 р.

20 Ashyralyev A., Sarsenbi A.M. Well-posedness of an elliptic equation with involution // Electronic Journal of Differential Equations. – 2015. – Vol. 2015, no. 284. P. 1 – 8.

21 Ashyralyev A., Sarsenbi A.M. Well-Posedness of a Parabolic Equation with Involution // Numerical Functional Analysis and Optimization. – 2017. – P. 1–10. – Doi.org/10.1080/01630563.2017.1316997.

22 Steklov V.A. Osnovnye Zadachi Matematicheskoi Fiziki. – Moskva, 1983.

23 Il'in V.A. The solvability of mixed problems for hyperbolic and parabolic equations // Russ. Math. Surveys. – 1960. - № 15(2). – P. 85 – 142.

24 Chernyatin V.A. Refinement of an existence theorem for a classical solution of a mixed problem for a one-dimensional wave equation // Differential Equations. – 1985. – Vol. 21(9). – P. 1070 – 1075.

25 Khromov A.P. Behavior of the formal solution to a mixed problem for the wave equation // *Comp. Math Math. Phys*. – 2016. – Vol.56 (2). – P. 243 – 255.

26 Kritskov L.V., Sarsenbi A.M. Riesz basis property of system of root functions of second-order differential operator with involution // Differential Equations. – 2017. – Vol. 53, no. 1. – P. 33 – 46.

27 Сарсенби А.А. Условия разрешимости смешанных задач для уравнения параболического вида с инволюцией // Математический журнал. – 2018. – Т. 18, № 2 (68). – C. 142 – 154.

28 Ильин В.А., Крицков Л.В. Свойства спектральных разложений, отвечающих несамосопряженным операторам // Функциональный анализ: Итоги науки и техники. Сер. Соврем. мат. и ее прил. Темат.обз. -М.: ВИНИТИ, 2006. – Т. 96. – C. 5 – 105.

1. Ahmad B., Alsaedi A., Kirane M. Tapdigoglu R.G. An inverse problem for space and time

fractional evolution equation with an involution perturbation // Quaestiones Mathematicae. – 2017. – Vol. 40(2). – P. 151–160.

1. Турметов Б.Х., Шиналиев К.М. О разрешимости некоторых обратных задач для

уравнения теплопроводности дробного порядка // Вестник КарГУ. Серия «Математика». –2011. – № 4 (64). – С. 73 - 79.

1. Сabada A., Tojo A.F. Equations with involutions. / Workshop on Differential

Equations. - Malla Moravka, Czech Republic., 2014.– 240 p.

32 Sadybekov M.A., Dildabek G., Ivanova M.B. On an Inverse Problem of Reconstructing a Heat Conduction Process from Nonlocal Data // Advances in Mathematical Physics. – 2018. – P. 1-8.

1. Il’in V.A., Kritskov L.V. Properties of Spectral Expansions Corresponding to Non-Self-

Adjoint Differential Operators // J. of Math. Sci. – 2003.– Vol. 116(5). – P. 3489-3550.

1. Kirane M., Samet B., Torebek B. Determination of an unknown source term temperature

distribution for the sub-diffusion equation at the initial and final data // Electronic Journal of Differential Equations. – 2017. – Vol. 2017, no 257. – P. 1 – 13.

1. Torebek B.T., Tapdigoglu R. Some inverse problems for the nonlocal heat equation with

Caputo fractional derivative // Math Meth Appl Sci. – 2017. – Vol. 40. – P. 6468–6479.

1. Kilbas A.A., Srivastava H.M., Trujillo J.J. Theory and applications of fractional differential equations // North-Holland Mathematics Studies. – Amsterdam, 2006. – Vol. 204. - 503 p.

ПРИЛОЖЕНИЕ А

Список опубликованных работ в журналах с импакт-фактором.

1 Kritskov L.V., Sadybekov M.A., Sarsenbi A.M., Properties in Lp of root functions for a nonlocal problem with involution. //Turkish Journal of Mathematics (2019) 43: 393 – 401 © TÜBİTAK doi:10.3906/mat-1809-12

2 Kirane M., Sadybekov M.A., Sarsenbi A.A., On an inverse problem of reconstructing a subdiffusion process from nonlocal data// Mathematical Methods in the Applied Sciences. – 2019. – Vol. 42. Issue - 6. – P. 2043-2052.

3 Karachik V.V., Sarsenbi A.M., Turmetov B.K., On the solvability of the main boundary value problems for a nonlocal Poisson equation.// Turkish Journal of Mathematics (2019) 43: 1604 – 1625

Список опубликованных работ в журналах, входящих в базу Scopus.

4 Сарсенби А.А., Турметов Б. Х., Базисность системы собственных функций дифференциального оператора второго порядка с инволюцией, *Вестн. Удмуртск. ун-та. Матем. Мех. Компьют. науки*, **29**:2 (2019), 183–196

Список опубликованных работ в зарубежных изданиях.

5 Сарсенби А. А., Некорректная задача для уравнения типа теплопроводности с инволюцией // Журнал Средневолжского математического общества. — 2019. — Т. 21, № 1. — С. 48–59.

6 M.A. Sadybekov M.A., Sarsenbi А.А., On one inverse problem of reconstructing a subdiffusion process with degeneration from nonlocal data // Доклады Адыгской (Черкесской) Mеждународной Академии наук. – 2019. – Т. 19. - № 1. – С. 31 – 41.

Список опубликованных работ в изданиях международных конференций

7 Сарсенби А.А., Некорректность смешанной задачи для уравнения параболического вида с инволюцией и условия их разрешимости. //Тезисы докладов Традиционной международной апрельской конференции в честь дня работников науки Республики Казахстан. Алматы 3-5 апреля 2019 года. С. 81

8 Сарсенби А.А., Результаты теории базисности собственных функций дифференциальных операторов с инволюцией. //Тезисы докладов Традиционной международной апрельской конференции в честь дня работников науки Республики Казахстан. Алматы 3-5 апреля 2019 года. С. 80

9 Сәрсенбі Ә.Ә. Существование и единственность решения смешанной задачи для возмущенного уравнения теплопроводности с инволюцией, //Материалы международной научной конференции «Теоретические и прикладные вопросы математики, механики и информатики», приуроченной к 70-летию д.ф.-м.н., проф. Рамзанова М.И. Караганда, 12-13 июня 2019 г. С. 98.

10 Сәрсенбі Ә.М. Базисность собственных функций краевой задачи для дифференциального уравнения второго порядка с инволюцией, //Материалы международной научной конференции «Теоретические и прикладные вопросы математики, механики и информатики», приуроченной к 70-летию д.ф.-м.н., проф. Рамзанова М.И. Караганда, 12-13 июня 2019 г. С. 99.

11 Sarsenbi А.А., Solvability of a Mixed Problem for a Heat Equation with an Involution Perturbation //The abstract book of the 3rd International conference of mathematical science ICMS 2019. - Maltepe University, Istanbul, Turkey: 4-8 September, 2019. – P. 108.

12 Sarsenbi А.М., Utelbaeva М., Mixed Problem for a Wave Equation with an Involution Perturbation //The abstract book of the 3rd International conference of mathematical science ICMS 2019. - Maltepe University, Istanbul, Turkey: 4-8 September, 2019. – P. 109.

ПРИЛОЖЕНИЕ В









