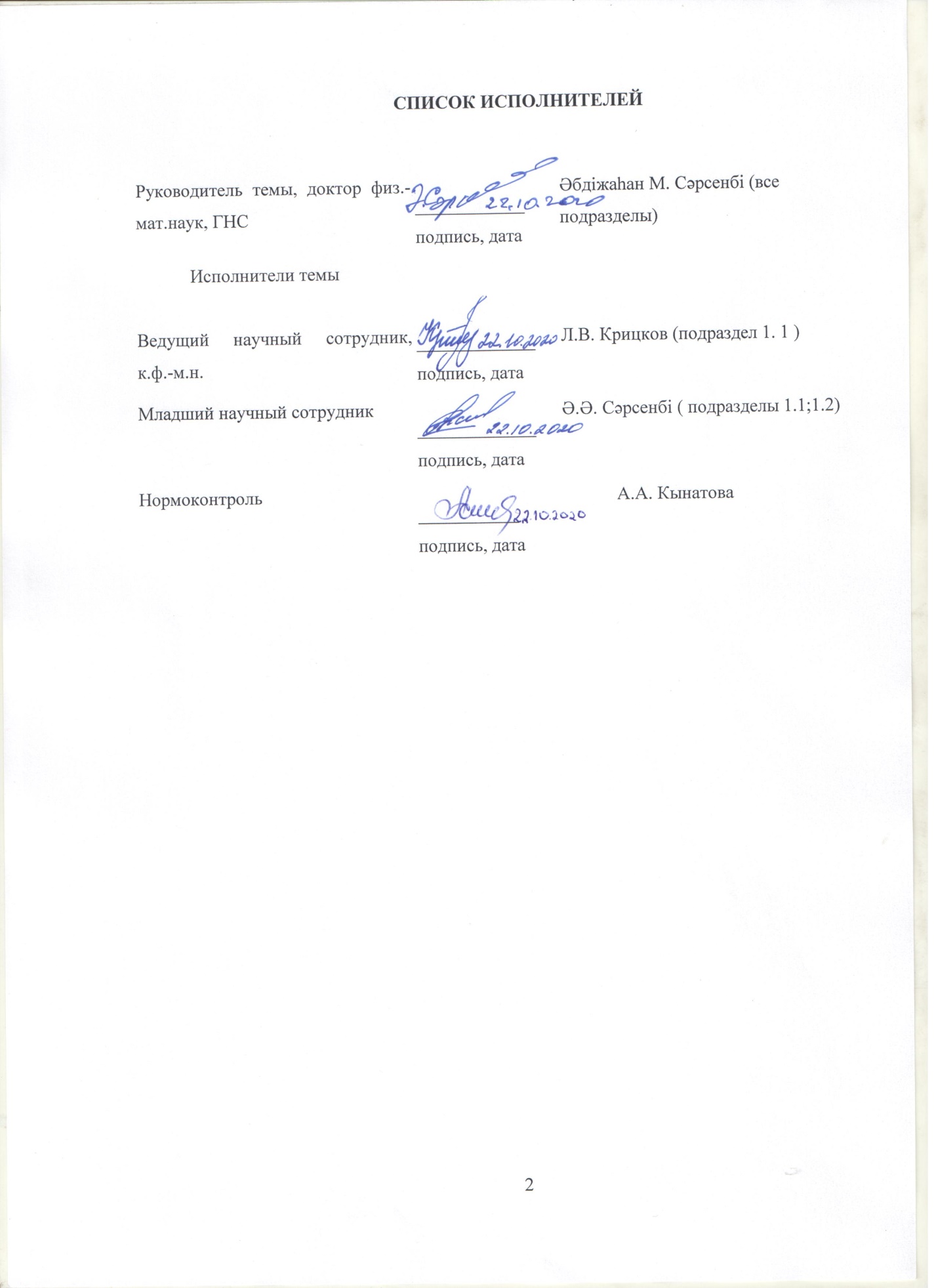


****

**РЕФЕРАТ**

Есeп 53 б., 33 әдебиет көздері, 2 қосымша.

МЕНШІКТІ ФУНКЦИЯ, РИСС БАЗИСІ, БИОРТОГОНАЛДЫ ЖІКТЕУЛЕР, ИНВОЛЮЦИЯСЫ БАР ДИФФЕРЕНЦИАЛДЫ ТЕҢДЕУЛЕР, ГРИН ФУНКЦИЯСЫ

Зерттеу нысаны ретінде инволюциясы бар екіншіі ретті дифференциалды операторлар үшін спектралдық есептер қарастырылған.

Жұмыстың мақсаты – инволюциясы бар екінші ретті дифференциалды операторлардың меншікті функциялар жүйесінің базистік қасиеттерін зерттеу.

Зерттеу әдістері – дифференциалды теңдеулер теориясының аналитикалық тәсілдері, гильберт кеңістігіндегі сызықты операторлардың абстрактілі теориясының, дифференциалды операторлар теориясының, функционалды анализдің, сандар теориясының тәсілдері. Алынған нәтижелер. Инволюциясы бар екінші ретті дифференциалды операторлардың меншікті функциялар жүйесінің базис болуы үшін жеткілікті шарттар Грин функциясының бағалауы түрінде, сондай ақ шеттік шарттар түрінде алынған. Қосымша алынған функциялар саны шексіз көп болатын инволюциясы бар екінші ретті дифференциалды оператор мысалы құрастырылып, оның түпкілікті векторлар жүйесінің базис болатындығы анықталған.

Инволюциясы бар параболалық, гиперболалық және эллипстік түрдегі теңдеулер үшін аралас есептердің шешімділігі көрсетілген. Зерттеу нәтижелері дифференциалды операторлардың спектралдық теориясында, инволюциясы бар дербес туындылы дифференциалды теңдеулер теориясында, әрқилы қолданбалы есептерде жүзеге асырылуы мүмкін.

**РЕФЕРАТ**

Отчет 53 с., 33 источн. 2 прил.

СОБСТВЕННАЯ ФУНКЦИЯ, БАЗИС РИССА, БИОРТОГОНАЛЬНЫЕ РАЗЛОЖЕНИЯ, ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ С ИНВОЛЮЦИЕЙ, ФУНКЦИЯ ГРИНА

Объектом исследования являются спектральные задачи для дифференциальных операторов второго порядка с инволюцией.

Цель работы – исследование базисных свойств дифференциальных операторов второго порядка с инволюцией.

В исследованиях использованы аналитические методы теории дифференциальных уравнений, методы абстрактной теории линейных операторов и теории линейных дифференциальных операторов в гильбертовом пространстве, методы функционального анализа, теории чисел.

Полученные результаты. Получены достаточные условия базисности собственных функций полуограниченных дифференциальных операторов второго порядка с инволюцией в терминах оценки функций Грина, а также в терминах краевых условий. Построен пример дифференциального оператора второго порядка с инволюцией с бесконечным числом присоединенных функций, доказана теорема о базисности систем корневых функций.

Показаны разрешимость смешанных задач для уравнений параболического, гиперболического и эллиптического типов с инволюцией.

Результаты исследований могут быть использованы в спектральной теории х дифференциальных операторов, в теории дифференциальных уравнений в частных производных с инволюцией, а также в различных прикладных задачах.

|  |
| --- |
| **СОДЕРЖАНИЕ** |
|  |
| |  | | --- | | ВВЕДЕНИЕ …………………………………………………………… 6  ОСНОВНАЯ ЧАСТЬ ……………………………………………………………. 8 | | |  |  |  |  | | --- | --- | --- | --- | | 1 | Базисные свойства собственных функций дифференциальных операторов второго порядка с инволюцией............................................... | | 8 | | 1.1  1.1.1  1.1.2  1.1.3    1.2  1.2.1  1.2.2  1.2.3  1.2.4 | Базисность собственных функций полуограниченного дифференциального оператора второго порядка с инволюцией. ................................................…..  Теоремы о равносходимости и базисности собственных функций дифференциального оператора второго порядка с инволюцией в терминах оценки функции Грина…………………………………………………………  Теоремы о равносходимости и базисности собственных функций дифференциального оператора второго порядка с инволюцией в терминах краевых условий …………………………………………  Спектральная задача с бесконечным числом присоединенных функций …  Разрешимость смешанных задач с инволюцией ……………………  Разрешимость смешанных задач для возмущенного уравнения теплопроводности с инволюцией ………………………………………….  Существование и единственность решения смешанных задач для возмущенного волнового уравнения с инволюцией  Разрешимость некоторых задач для возмущенного уравнения Пуассона с инволюцией ………………………………………………………………….  Разрешимость обратной задачи для параболического уравнения дробного порядка с инволюцией …………………………………………………………  ЗАКЛЮЧЕНИЕ………………………………………………………………  СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ………………………  ПРИЛОЖЕНИЕ А……………………………………………………………  ПРИЛОЖЕНИЕ B ………………………………………………………… | | 8  12  221  225  27  27  31  33  36  41  42  45  47 | |  | |  | |  | |  | | |

**ВВЕДЕНИЕ**

Цель проекта состоит в доказательстве теорем о базисности собственных векторов (при необходимости пополненных присоединенными векторами) дифференциальных операторов второго порядка с инволюцией

Исследования по данному проекту проводились согласно утвержденному календарному плану, в соответствии с заявкой на участие в конкурсе. Запланированные по проекту исследования полностью завершены. По результатам исследований в рамках проекта опубликованы 32 работы. Из них 6 работ в журналах с импакт-фактором по базе Web of Science и 1 работа в журнале из базы Scopus. Список основных опубликованных работ по результатам настоящего проекта приведены в приложении А. Приложение В содержит календарный план выполнения заданий проекта.

Основными результатами исследований по данному проекту являются:

1) создание теории функции Грина одномерного дифференциального оператора второго порядка с инволюцией;

2) теоремы о базисности и безусловной базисности в пространстве  собственных функций и равносходимости разложений произвольной функции из класса  по собственным функциям одномерных дифференциальных операторов второго порядка с инволюцией;

3) равномерная сходимость разложений по собственным функциям одномерных дифференциальных операторов второго порядка с инволюцией;

4) теорема о базисности в классе  собственных и присоединенных функций дифференциального оператора второго порядка с инволюцией, обладающей бесконечным числом присоединенных функций;

5) теоремы о существовании и единственности решений смешанных задач для уравнений параболического, гиперболического и эллиптического типов с инволюцией.

В отчете за 2018 год (№ госрегистрации 0118РК00448; инвентарный № 0218РК00615) изложены результаты исследований в случае краевых условий типа Дирихле. В отчете за 2019 год (№ госрегистрации 0118РК00448; инвентарный № 0219РК00034) изложены результаты исследований в случае краевых условий типа Неймана. В 2020 году проведены исследования в случае краевых условий периодического и антипериодического типов.

Отчет состоит из одного раздела и двух подразделов. В первом подразделе излагаются основные результаты о равносходимости, базисности и безусловной базисности собственных функций дифференциального оператора второго порядка с инволюцией, теория функции Грина одномерных дифференциальных операторов второго порядка с инволюцией. Достаточные условия базисности собственных функций дифференциальных операторов второго порядка с инволюцией получены в терминах оценок функций Грина и в терминах краевых условий. Построен пример дифференциального оператора второго порядка с инволюцией с бесконечным числом присоединенных функций. Проведен полный спектральный анализ задачи. Доказана теорема о базисности в классе  корневых функций спектральной задачи.

Во втором подразделе приведены результаты исследований о разрешимости смешанных задач для уравнений параболического, гиперболического и эллиптического типов с инволюцией. Доказаны теоремы о существовании и единственности решения смешанных задач методом Фурье. Изучена одна обратная задача для уравнения дробного порядка.

**ОСНОВНАЯ ЧАСТЬ**

**1 Базисные свойства собственных функций дифференциальных операторов второго порядка с инволюцией**

**1.1 Базисность собственных функций полуограниченного дифференциального оператора второго порядка с инволюцией.**

Этот подраздел посвящен исследованию спектральных свойств дифференциальных операторов второго порядка с инволюцией. Важное место в спектральной теории дифференциальных операторов занимает вопрос о базисности собственных функций. Решение вопроса базисности собственных функций позволяет использовать метод Фурье при решений различных задач для уравнений в частных производных. Метод Фурье использован в работах [1, 2] при изучений обратных задач для дифференциальных уравнений в с инволюцией, в работе [3] при исследовании поведения решений уравнения в частных производных с инволюцией. Теории функции Грина дифференциальных уравнений с инволюцией посвящены работы [4,5]. Исследованию спектральных свойств дифференциальных операторов с инволюцией посвящены работы [6-18]. Вопросы разрешимости задач для дифференциальных уравнений в частных производных с инволюцией рассмотрены в работах [19 - 21].

В настоящей работе дано обоснование метода Фурье для решения смешанных задач для возмущенных уравнений теплопроводности с инволюцией, возмущенных волновых уравнений с инволюцией. Исследование вопросов равносходимости и базисности собственных функций дифференциального оператора второго порядка с инволюцией с конкретными краевыми условиями проводится модификацией интегрального метода Коши, хорошо разработанного на случай обыкновенных дифференциальных операторов. В промежуточном отчете за 2018 год по настоящему проекту перечисленные задачи были изучены в случае краевых условий типа Дирихле, а в промежуточном отчете за 2019 год перечисленные задачи были изучены в случае краевых условий типа Неймана. В 2020 году с изложенной точки зрения изучены периодическая и антипериодическая задачи. Нужно отметить, что при исследовании поставленных задач существенную трудность вызывают вопросы построения функции Грина одномерных краевых задач для дифференциального уравнения второго порядка с инволюцией и их оценка.

Решению вопроса обоснования метода Фурье в случае классических уравнений посвящены работы В.А. Стеклова [22], В.А. Ильина [23]. Дальнейшее развитие метода Фурье, связанное с понижением требований гладкости начальных данных, имеется в работах В.А. Чернятина [24], А.П. Хромова [25].

Пусть в области  рассматривается смешанная задача для возмущенного уравнения теплопроводности с инволюцией

 (1)

 (2)

Уравнение (1) содержит преобразование инволюции. Преобразование  некоторой функции  мы называем инволюцией, если . Так что преобразование  является инволюцией. Далее, коэффициенты  - некоторые числа. Всюду в дальнейшем параметр  удовлетворяет условию , функция  непрерывна на отрезке . Если система собственных функций спектральной задачи

 (3)

то ряд

 (4)

является формальным решением смешанной задачи (1), (2). Выполнение начального условия



требует решения вопроса разложения начальной функции в ряд по собственным функциям. Для дифференцируемости функции (4) нужно исследовать прежде всего равномерную сходимость последнего ряда.

Рассмотрим краевую задачу

 (5)

Функции

,

являются линейно независимыми решениями однородного уравнения (5).

Функцией Грина краевой задачи (5) назовем такую функцию , что функция



является решением краевой задачи





где - непрерывная функция. Заметим, что полюса функции Грина служат собственными значениями спектральной задачи (5). Нам известно [14], что спектральная задача (5) с краевыми условиями типа Неймана  имеет две серии собственных значений

,

причем система собственных функций вида



образует ортонормированный базис пространства. Если число  не является четным, то все собственные значения задачи Неймана однократны. Сформулированное условие в частных случаях заменяет требование об отсутствии кратных собственных значений. И при выполнении этого условия возможно применение интегрального метода Коши. В той работе [14] рассмотрены также задача типа Дирихле, задачи периодического и антипериодического типов.

Пусть все собственные значения  спектральной задачи (5) однократны, не имеют точки сгущения на конечном интервале. Обозначим . В комплексной плоскости рассмотрим окружности  c общим центром в начале координат:



Эти окружности будем считать непересекающимися (например, в случае задачи типа Дирихле или Неймана это всегда можно сделать) и они не проходят через точки . Это значит, каждое из чисел  имеет некоторую окрестность, содержащую только это число. При  окружности, соответственно переходят в окружности  в комплексной - плоскости. Теперь мы сможем перейти к изучению вопросов базисности собственных функций при выполнении вышеизложенных условий.

1.1.1 Теоремы о равносходимости и базисности собственных функций дифференциального оператора второго порядка с инволюцией в терминах оценки функции Грина

Нас интересует вопрос о возможности разложения произвольной функции  в сходящийся ряд по собственным функциям спектральной задачи (3), с непрерывным комплекснозначным коэффициентом  на интервале . Сходимость разложения по собственным функциям спектральной задачи (3) произвольной функции  из класса  будет следовать из теоремы о равносходимости разложений по собственным функциям спектральных задач (3) и (5).

Обозначим через  функцию Грина задачи (3), а через  - функцию Грина задачи (5), полюсами которой являются числа . Так как, почти всюду на интервале (-1,1)





то



Функция  удовлетворяет краевым условиям (3). Поэтому вне полюсов функции Грина  и  имеет место представление

 (6)

Мы покажем существование решения интегрального уравнения (6). Это решение будет функцией Грина краевой задачи (3).

Введем в рассмотрение функцию .

Пусть , шар достаточно малого радиуса .

Справедлива следующая

Теорема 1. Пусть вне окружности  для функции Грина  краевой задачи (5) справедлива оценка



Тогда для всех достаточно больших  решение интегрального уравнения (6) существует.

Доказательство. Применяем метод итерации. Пусть  и

 (7)

для всех достаточно больших . Соотношение (7) при  дает оценку



Для дальнейших выкладок введем следующие обозначения



 (8)

где максимум берется по  для фиксированного  и для достаточно больших , лежащих вне полюса функции . Нам нужно показать справедливость оценки

 (9)

Для  оценка (9) следует из первого соотношения в (8). Предположим справедливость оценки (9) при  и докажем, что оценка (9) верна и при . Тогда из второго соотношения (8) выводим неравенство

 (10)

Распишем соотношение





По неравенству треугольника имеем



Неравенство



влечет оценку



а также, соотношение



влечет неравенство



Кроме того



Поэтому мы можем написать неравенство

.

Это неравенство вместе с неравенством (10) приводит к оценке



Для достаточно больших  можно считать

.

Следовательно, верна оценка



для любого , откуда следует справедливость оценки (9). Из доказанной оценки следует равномерная сходимость ряда



и последовательности его частичных сумм

.

Это означает равномерную сходимость последовательности  к предельной функции , которая удовлетворяет интегральному уравнению (6). Теорема 1 доказана.

Важно отметить, что оценка функции Грина в условии теоремы 1 верна и для функции Грина  спектральной задачи (3). Этот факт также имеет важное значение для доказательства теоремы равносходимости. В отчетах за 2018 год и за 2019 год была доказана справедливость оценки функции Грина в условии теоремы 1 в случае задач типа Дирихле и Неймана. В последующем справедливость этих оценок установлена для задач периодического и антипериодического типов.

Пусть



частичные суммы разложения по собственным функциям спектральной задачи (5), где . Частичные суммы разложения по собственным функциям спектральной задачи (3) обозначим через



Последовательность  назовем равносходящимся с последовательностью на промежутке  если  равномерно на этом промежутке при 

Сформулируем теорему о равносходимости.

Теорема 2. Если вне окружностей  для функции Грина  краевой задачи (5) справедлива оценка



и все собственные значения спектральной задачи (5) однократны, то для любой функции  последовательность  равносходится с последовательностью 

Доказательство. Рассмотрим разность частичных сумм разложений по собственным функциям спектральных задач (3) и (5)

 (11)

Из доказательства предыдущей теоремы следует, что



Применяя эту оценку, из равенства (8) получаем неравенство



Тогда из равенства (11) вытекает следующее неравенство





Если ввести обозначение

,

то будем иметь



Разобьем рассматриваемый интервал на две части , где





 достаточно малое число. Теперь мы можем переписать последнее неравенство в виде



(12)



Поскольку

,

то второе слагаемое в правой части (12) можно сделать меньшим чем  путем выбора числа . Обозначим через  радиус круга . Тогда из равенства





получим неравенство



Выбирая номер  достаточно большим, можно сделать первое слагаемое в (12) меньше чем . Теорема доказана.

Из доказанной теоремы немедленно следует базисность собственных функций спектральной задачи (3). Этот факт сформулируем в виде теоремы.

Теорема 3. Если все собственные значения спектральной задачи (5) однократны и соответствующие собственные функции образуют базис в , то система собственных функций спектральной задачи (3) образует базис пространства .

Доказательство. Пусть  норма элемента пространства . Тогда для любой функции 

.

Первое слагаемое меньше  в силу базисности собственных функций спектральной задачи (5), а второе слагаемое меньше  в силу теоремы 2 о равносходимости. Теорема 3 доказана.

Доказанная теорема 3 утверждает базисность собственных функций спектральной задачи (3). При этом остается неясным вопрос о виде этого базиса: будет ли данный базис безусловным базисом или базисом Рисса? По этому поводу мы можем утверждать следующее.

Теорема 4. Пусть собственные значения спектральной задачи (3) удовлетворяют следующим двум условиям: 1)  2)  Тогда всякий базис из собственных функций спектральной задачи (3) образует безусловный базис пространства .

Для доказательства заметим, что если выполнено условие теоремы, т.е. если система  собственных функций спектральной задачи (3) образует базис пространства , то всегда выполнена равномерная оценка

, (13)

где  - система, биортогонально сопряженная к системе , состоящая из собственных функций спектральной задачи, сопряженной к (3). А из работы Л.В. Крицкова и А.М. Сарсенби [26] известно, что в условиях спектральной задачи (3) условие (13) является необходимым и достаточным для безусловной базисности собственных функций спектральной задачи (3). Тем самым теорема 4 доказана.

1.1.2 Теоремы о равносходимости и базисности собственных функций дифференциального оператора второго порядка с инволюцией в терминах краевых условий

В случае конкретных краевых условий можно показать справедливость оценки функции Грина в теореме 2. Рассмотрим краевые задачи

 (14)

 (15)

с одним из следующих четырех краевых условий

 (16)

Пусть - частичные суммы разложения функции  в ряд по собственным функциям краевой задачи (14) с одним из краевых условий (16), а - частичные суммы разложения той же функции  в ряд по собственным функциям краевой задачи (15) с тем же из краевых условий (16). Сформулируем теорему о равносходимости для случая задач (14).

Теорема 5. Если число  не является четным, то для любой функции  последовательность  равносходится с последовательностью  в случае каждой из задач (16).

Для доказательства теоремы достаточно показать справедливость оценки функции Грина в теореме 2. Тогда справедливость теоремы 5 вытекает из теоремы 2. Условие теоремы 5 исключает наличие кратных собственных значений каждой из задач (14), (16).

Теорему 5 докажем для случая краевых условий типа Неймана (16.2). С этой целью приведем некоторые факты.

Лемма 1. Если λ не является собственным значением однородной краевой задачи (14), (16.2), то краевая задача



разрешима для любой непрерывной функции  и ее решение представимо в виде



где



Доказательство леммы проводится непосредственной проверкой.

Из теоремы 1 вытекает важное

Следствиe. Функция Грина краевой задачи (14), (16.2) имеет вид



Отметим, что построение функции Грина является непростой задачей, играет важную роль при исследовании краевых задач. В основе метода Биркгофа-Тамаркина, разработанного для исследования вопросов сходимости разложений по собственным функциям обыкновенных дифференциальных операторов, лежит оценка функции Грина изучаемого оператора. Построенная функция Грина позволяет перенести теорию Биркгофа-Тамаркина на случай изучаемых нами дифференциальных операторов с инволюцией.

В дальнейшем нам понадобится оценка функции Грина краевых задач (14), (16). Доказательство мы проведем для случая задачи Неймана (16.2). Полученные оценки справедливы в случае всех краевых условий (16).

Пусть , шар достаточно малого радиуса .

Лемма 2. Если  и , то для функции Грина  краевой задачи (14), (16.2) справедлива следующая равномерная оценка



при  , где

.

Доказательство. При  функцию Грина можно преобразовать к виду



Так как , то , . Поэтому



если  и



если .

Таким образом, при  функция Грина удовлетворяет следующей оценке



В случае  аналогичным образом получаем оценку в виде



В случае  имеем оценку вида



Полученные оценки можно написать общем виде



Лемма 2 доказана.

Таким образом, для краевой задачи (14), (16.2) выполнены все условия теоремы 2. Следовательно, теорему 5 можно сформулировать в терминах краевых условий.

Теорема 6. Если число  не является четным, то система собственных

функций каждой из спектральных задач (15), (16) образует базис пространства .

Доказательство. В работе [14] установлено, что система собственных функций каждой из спектральных задач (14), (16) образует ортонормированный базис пространства. Пусть  норма элемента пространства . Тогда для любой функции 

.

для каждой из спектральных задач (15), (16). Первое слагаемое меньше  в силу базисности собственных функций спектральных задач (14), (16), а второе слагаемое меньше  в силу теоремы 5 о равносходимости. Теорема 6 доказана.

1.1.3 Спектральная задача с бесконечным числом присоединенных функций

В промежуточном отчете за 2018 год проведен полный спектральный анализ задачи

 (17)

где , в которой дифференциальное выражение содержит преобразование инволюции независимой переменной в старшей производной, а краевые условия носят нелокальный характер. Показано, что если  иррационально, то система собственных функций полна и минимальна в , но не является базисом. В случае рационального  указан способ выбора присоединенных функций, при котором система корневых функций задачи образует безусловный базис в . Спектральная задача наряду с собственными функциями содержит бесконечно много присоединенных функций.

Тем самым установлено, что задача (17) обладает всеми характерными чертами существенно несамосопряженных задач и ее спектральные свойства могут коренным образом меняться при сколь угодно малых изменениях параметра

За отчетный период задача (17) рассмотрена в пространстве . Основной результат подраздела содержится в следующих теоремах.

Теорема 7. Пусть число  иррационально и . Тогда система корневых функций задачи (17) содержит только собственные функции, причем она полна и минимальна в , но не образует базиса в этом пространстве.

Теорема 8. Пусть число  рационально и . Тогда спектр задачи (17) распадается на две последовательности:  при этом для каждого  имеется только одна собственная функция, а для каждого  - одна собственная и одна присоединенная функции. Система корневых функций полна и минимальна в  и присоединенные функции можно выбрать так, чтобы вся система образовывала базис в .

Отметим, что функционально-дифференциальные уравнения, подобные уравнению (17) исследовались многими авторами. Алгебраические и аналитические аспекты теории обыкновенных дифференциальных уравнений с инволюцией обсуждались в [4, 5]. Спектральные вопросы, возникающие в связи с дифференциальными операторами с инволюцией, затрагивались для операторов первого порядка в [6 – 9, 10 – 12] и для операторов второго порядка в [13 – 18].

Полные доказательства теорем 7 и 8 опубликованы в научном журнале с импакт-фактором (см. Приложение А). В связи с ограниченностью количества страниц промежуточного отчета доказательства сформулированных теорем мы опускаем.

**1.2 Разрешимость смешанных задач с инволюцией**

Полученные выше результаты позволяют показать существование и единственность решения смешанных задач для некоторых уравнений параболического, гиперболического и эллиптического видов с инволюцией методом разделения переменных. Следующая теорема дает положительность собственных значений краевых задач (3), (16).

1.2.1 Разрешимость смешанных задач для возмущенного уравнения теплопроводности с инволюцией

Теорема 9. Если функция  на промежутке , то все собственные значения  каждой из спектральных задач (3) положительны.

Доказательство проводится путем умножения уравнения (3) на функцию  и интегрированием по частям полученного равенства по промежутку .

Установлена абсолютная и равномерная сходимость рядов Фурье по собственным функциям каждой из краевых задач (3), (16).

Теорема 10. Если число  не является четным и коэффициент  уравнения (3), вещественная функция, то для любой дважды дифференцируемой функции, удовлетворяющей условиям , ряд Фурье

 (18)

по полной ортонормированной системе  собственных функций каждой из спектральных задач (3), (16) сходится абсолютно и равномерно.

Доказательство проводится с использованием представления вида

 .

Далее коэффициенты  в разложении (18) можно преобразовать, с последующим использованием свойств функции Грина и неравенства Бесселя для ортонормированных систем.

Сформулируем теорему существования и единственности решения смешанных задач для возмущенного уравнения теплопроводности с инволюцией.

В двумерной области  рассмотрим следующую смешанную задачу для уравнения параболического вида

 (19)

 (20)

Уравнение (19) содержит преобразование инволюции. Параметр  удовлетворяет условию , функция  непрерывна на отрезке  . Обозначим через  систему собственных функций спектральной задачи

 (21)

Теорема 11. Пусть выполнены следующие условия:

1) вещественная непрерывная функция  неотрицательна;

2) число  не является четным, .

Тогда для любой дважды дифференцируемой функции , удовлетворяющей условиям , решение смешанной задачи (19), (20) существует, единственно и представимо в виде ряда

. (22)

Доказательство. Для доказательства теоремы достаточно показать равномерную сходимость ряда (22) и рядов

,  (23)

. (24)

По теореме 9 все числа положительны. Поэтому  для любого  и . По теореме 10 ряд  сходится равномерно. Значит ряд (22) абсолютно и равномерно сходится. Далее, из , начиная с некоторого , следует равномерная сходимость ряда (23). Ряд (24) преобразуем следующим образом

 (25)

Ряды в правой части (25) сходятся абсолютно и равномерно при . Ряд в левой части (25) также сходится абсолютно и равномерно при . Отсюда следует абсолютная и равномерная сходимость ряда

 (26)

Ряд (26) умножим на число  и прибавим к ряду (25). Полученный ряд



также сходится абсолютно и равномерно при . Таким образом, ряды (22), (23), (24) сходятся абсолютно и равномерно при . Доказанное означает, что функция (22) удовлетворяет уравнению (19) и условиям (20).

Докажем единственность решения. Пусть существуют два решения  и  смешанной задачи (19) и (20). Тогда функция  удовлетворяет уравнению (19) и начальному условию



Умножив обе части уравнения (19) на функцию , проинтегрируем по переменной 





Полученное равенство проинтегрируем по переменной . Тогда получим





Применяя неравенство  и пользуясь не отрицательностью функции  и соотношением , мы получим неравенство

,

из которого следует . Теорема 11 доказана.

1.2.2 Существование и единственность решения смешанных задач для возмущенного волнового уравнения с инволюцией

Теорему 11 можно перенести на случай уравнений гиперболического и эллиптического видов с инволюцией. Рассмотрим случай уравнения гиперболического вида с инволюцией. В двумерной области  рассмотрим смешанную задачу для уравнения гиперболического вида

 (27)

. (28)

Методом разделения переменных получаем следующие две задачи: задачу (21) и

 (29)

. (30)

Обозначим через  систему собственных функций спектральной задачи (21), соответствующих собственным значениям .

Решение уравнения (29) имеет вид . Решение смешанной задачи (27), (28) ищем в виде ряда

 (31)

Результаты, изложенные в подразделе 1, служат обоснованием для применения метода Фурье для этой смешанной задачи.

Справедлива следующая

Теорема 12. Пусть выполнены следующие условия:

1) вещественная непрерывная функция  неотрицательна;

2) число  не является четным, ,

3) начальные функции  дважды непрерывно дифференцируемы и удовлетворяют условиям , . Тогда решение смешанной задачи (27), (28) существует, единственно и представимо в виде ряда (31).

Для доказательства теоремы достаточно показать равномерную сходимость на отрезке  при  ряда (31) и следующих четырех рядов:

;

;

;

.

Несложно заметить, что равномерная сходимость выписанных рядов будет следовать из равномерной сходимости рядов

.

На доказательстве равномерной сходимости этих рядов мы не будем останавливаться, так как оно проводится по аналогии доказательств предыдущих утверждений.

Аналогичным образом можно сформулировать и доказать теорему существования и единственности смешанных задач для уравнения эллиптического вида с инволюцией. В этом случае нами решена более общая задача.

1.2.3 Разрешимость некоторых задач для возмущенного уравнения Пуассона с инволюцией

Пусть  – единичный шар , а  – единичная сфера,  – действительная ортогональная матрица . Предположим также, что существует такое натуральное  что .

Заметим, что если , или , то для любого  имеют место включения , или . Это так, поскольку преобразование пространства  с матрицей  сохраняет норму .

Приведем простейшие примеры таких отображений.

Пример 1. Любой точке  поставим в соответствие точку . В этом случае . Ясно, что  и кроме того , а значит .

Пример 2. Очевидно, что преобразование, осуществляемое матрицей  может быть и вращением в пространстве , например, если , где

,

 ‑ единичная матрица  и . Это так поскольку  и , а значит . Кроме того необходимо положить , где .

Пусть  *‑* некоторые действительные числа,  и  функции, заданные на  и , соответственно. Введем оператор

.

Рассмотрим в области  следующие краевые задачи.

Задача Дирихле. Найти функцию , удовлетворяющую условиям

, (32)

. (33)

Задача Неймана. Найти функцию , удовлетворяющую уравнению (32) и условию

. (34)

где  ‑ вектор внешней нормали к сфере .

Задача Робена. Найти функцию , удовлетворяющую уравнению (32) и следкющему условию

. (35)

где  - действительное число.

В случае  мы получаем классические задачи Дирихле, Неймана и Робена для обычного уравнения Пуассона. Отметим, что в работе [27] для классического уравнения Лапласа в случае  изучены нелокальные краевые задачи с отображением  из примера 2.

Теорема 13. Пусть при всех  справедливы неравенства  и решение задач Дирихле, Неймана и Робена существуют. Тогда

1) решение задачи Дирихле (32), (33) единственно;

2) решение задачи Неймана (32), (34) единственно с точностью до постоянного слагаемого;

3) если , то решение задачи Робена (32), (35) единственно.

Лемма 3**.** Пусть  при  тогда матрица  имеет структуру матрицы 

,

где

 (36)

при . Кроме того, при  имеет место равенство , где  и .

Справедливо следующее утверждение относительно задачи (32), (33).

Теорема 14. Пусть числа  такие, что  при , где  ‑ корни степени  из единицы и . Тогда решение задачи (32), (33) существует, единственно и представляется в виде

,

где

,

а  при  находится из (36) .

Исследуем необходимые и достаточные условия разрешимости задачи Неймана (32), (34). Пусть  ‑ функция Грина классической задачи Неймана. Отметим, что явный вид функции Грина для шара  в случаях  приведены в учебниках по уравнениям в частных производных (см. например [28,29]), а в случае размерности  построены в работах [30, 31].

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 15. Пусть  . Тогда для разрешимости задачи (32), (34) необходимо и достаточно выполнения условия

.

Если решение задачи существует, то оно единственно с точностью до постоянного слагаемого и представляется в виде

,

где коэффициенты  находится из (36) и

.

Теперь приведем основное утверждение относительно задачи (32), (35). Пусть  ‑ функция Грина классической задачи Робена. Отметим, что явный вид функции Грина  построен в работах [32, 33].

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 16. Пусть  и числа  такие, что  при , где  ‑ корни степени  из единицы и . Тогда решение задачи (32), (35) существует, единственно и представляется в виде

,

где

, ,

а коэффициенты  находятся из (36).

1.2.4 Разрешимость обратной задачи для параболического уравнения дробного порядка с инволюцией

В настоящем подразделе рассматривается проблема моделирования процесса термодиффузии в замкнутой металлической проволоке, намотанной на тонкий лист изоляционного материала.

Рассмотрим уравнение

 (37)

в области . Здесь  влияние внешнего источника, который не меняется со временем; является начальной точкой времени, а  является конечной. Производная  определена как



и называется производной порядка  в смысле Капуто, где  дробный интеграл в смысле Римана-Лиувилля



Производная Капуто позволяет нам рассматривать начальные условия естественным образом.

В качестве дополнительной информации мы берем значения одного начального и одного конечного условия температуры

 (38)

Поскольку провод замкнут, естественно предположить, что температура на концах провода всегда одинакова

 (39)

Рассмотрим процесс, в котором температура на одном конце в каждый момент времени  пропорциональна (дробной) скорости изменения среднего значения температуры по всему проводу. Затем,

 (40)

Здесь  коэффициент пропорциональности.

Таким образом, мы приходим к следующей математической обратной задаче: Найти правую часть ** уравнения субдиффузии (37) и его решение ** с учетом начальных и конечных условий (38), граничного условия (39) и условия (40).

Отметим, что данная задача в случае, когда  рассмотрена в подразделе 1.2 отчета..

Условие (40) является нелокальной. Используя методику работы А.А. Самарского, мы преобразуем это условие. Учитывая уравнение (37) из (40), получим



Следовательно



Введем обозначения



Тогда в терминах новой функции мы получим следующую обратную задачу:

В области ** найти пару функций  и  удовлетворяющих уравнению

 (41)

начальному условию

 (42)

конечному условию



и граничным условиям

 (43)

Здесь  и  заданные достаточно гладкие функции;  ненулевое действительное число такое, что  и 

Приведем определение решения рассматриваемой задачи. Под регулярным решением обратной задачи (41)-(43) мы понимаем пару функций  класса   которые обращают уравнение (41) и условия (42)-(43) в тождество.

Под обобщенным решением обратной задачи (41)-(43) мы понимаем пару функций  класса , которые удовлетворяют уравнению. (41) и условиям (42)-(43) почти всюду.

Использование метода Фурье для решения задачи (41)-(43) приводит к спектральной задаче для оператора  задаваемой дифференциальным выражением

 (44)

и граничными условиями

 (44)

где  - спектральный параметр.

Следовательно, задачи (41)-(43) и (37)-(40) также совпадают. Таким образом, в дальнейшем мы будем рассматривать задачу (37)-(39) с граничным условием

 (45)

Другими словами, в дальнейшем мы рассмотрим обратную задачу (37)-(39), (45).

Теперь мы приведем теорему о существования и единственности решения нашей обратной задачи.

Теорема 17. Пусть  и  такое, чтобы условие (43) выполнялось для всех значений индексов .

1. Пусть  и удовлетворяют граничным условиям (44). Тогда для вещественного числа  такого, что  обратная задача (37)-(39), (45) имеет единственное обобщенное решение, устойчивое по норме:



где постоянная  не зависит от .

1. Пусть  и функция ** и ** удовлетворяют граничным условиям (44), тогда для вещественного числа  такого, что  обратная задача (37)-(39), (45) имеет единственное регулярное решение.

**ЗАКЛЮЧЕНИЕ**

В отчете изложены результаты исследований базисных свойств собственных функций дифференциальных операторов второго порядка с инволюцией. Получены следующие результаты:

- построены функции Грина полуограниченных одномерных дифференциальных операторов второго порядка с инволюцией с краевыми условиями типа Дирихле, Неймана, периодического и антипериодического типов;

- доказаны теоремы о базисности собственных функций и равносходимости разложений по собственным функциям одномерных дифференциальных операторов второго порядка с инволюцией с краевыми условиями общего вида;

- доказаны теоремы о базисности собственных функций и равносходимости разложений по собственным функциям одномерных дифференциальных операторов второго порядка с инволюцией с конкретными краевыми условиями;

- построен пример одномерного дифференциального оператора второго порядка с инволюцией с бесконечным числом присоединенных функций. Доказана базисность корневых функций в пространстве  .

- доказаны теоремы о существовании и единственности решения смешанных задач для уравнений параболического, гиперболического и эллиптического видов с инволюцией;

Полученные результаты служат обоснованием для применения метода Фурье к начально – краевым задачам в случае уравнений в частных производных с инволюцией. В случае оператора двукратного дифференцирования с инволюцией решена одна из важных задач - задача построения функции Грина некоторых краевых задач. Из явного вида функции Грина видно ее существенное отличие от случая обыкновенного дифференциального оператора. Построенные функции Грина использованы при доказательстве теорем о равносходимости разложений по собственным функциям одномерных дифференциальных операторов второго порядка с инволюцией.

Полученные результаты позволяют говорить о создании теории базисности корневых векторов дифференциальных операторов с инволюцией. Результаты могут найти применение в теории разрешимости дифференциальных уравнений в частных производных с инволюцией, при решении обратных задач и др.

**СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ**

1 Kirane M., Nasser A.S. Inverse problems for a nonlocal wave equation with an involution perturbation // J. Nonlinear Sci. Appl. – 2016. – Vol. 9. – P. 1243 – 1251.

2 Ahmad B., Alsaedi A., Kirane M., Tapdigoglu R.G. An inverse problem for space and time fractional evolution equations with an involution perturbation // Quaestiones Mathematicae. -2017. – Vol. 40.- №. 2. – P. 151 – 160.

3 Wiener J. Generalized solutions of functional differential equations. – Singapore: World Sci. 1993. – P. 160 – 215.

4 Cabada A., Adrian F.Tojo. Existence results for a linear equation with reflection, non-constant coefficient and periodic boundary conditions // Journal of Mathematical Analysis and Application. – 2014. - V. 412.- №1. – P. 529 – 546. – DOI: 10.1016/j.jmaa.

5 Cabada A., Adrian F. Tojo. Solutions and Green’s function of the first order linear equation with reflection and initial conditions // Boundary Value Problems. – 2014. – V. 99.

6 Бурлуцкая М.Ш., Хромов А.П. Обоснование метода Фурье в смешанных задачах с инволюцией // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. – 2011. – Т.11.- №4. – C. 3 – 12.

7 Бурлуцкая М.Ш., Хромов А.П. Метод Фурье в смешанной задаче для уравнения с частными производными первого порядка с инволюцией // Ж. вычис. матем. и матем. физ. – 2011. – T.51.- №12. – С. 2233 – 2246.

10 Kopzhassarova А. А., Lukashov A. L., Sarsenbi A. M. Spectral properties of nonself-adjoint perturbations for a spectral problem with involution *//* Abstr. Appl. Anal. – V. – 2012. – Article ID 590781. – P. 5.

11 Sadybekov M.A., Sarsenbi A.M., Mixed problem for a differential equation with involution under boundary conditions of general form // Edited by: Ashyralyev A; Lukashov A, in Book Series: AIP Conference Proceedings, 2012. – V. 1470. – P. 225 – 227.

12 Садыбеков М.А., Сарсенби А.М. Решение основных спектральных вопросов всех краевых задач для одного дифференциального уравнения первого порядка с отклоняющимся аргументом // Узбекский математический журнал. – 2007. - № 3. – C. 88 – 94.

13 Сарсенби А.М. [Безусловные базисы, связанные с неклассическим дифференциальным оператором второго порядка // Дифференциальные уравнения. –](http://elibrary.ru/item.asp?id=13726688) 2010. – T. 46.- №4. – С. 506 – 511.

14 Kopzhasarova A.A, Sarsenbi A.M. Basis Properties of Eigenfunction of Second-Order Differential Operators with Involution // Abstract and Applied Analysis. – 2012. – V. 2012. – P. 6 – Article ID 576843. – DOI:10.1155/2012/576843.

15 Садыбеков М.А., Сарсенби А.М. Критерий базисности системы собственных функций оператора кратного дифференцирования с инволюцией // Дифференциальные уравнения. – 2012. – T. 48.- №8. – С. 1126 – 1132.

16 Садыбеков М.А., Сарсенби А.М. О понятии регулярности краевых задач для дифференциального уравнения второго порядка с отклоняющимся аргументом // Математический журнал. – 2007. – Т.7. - № 1(23). – С. 82 – 88.

17 Садыбеков М.А., Сарсенби А.М. Безусловная сходимость спектральных разложений, связанных с дифференциальным уравнением второго порядка с отклоняющимся аргументом // Вестник КазНУ.– 2006.- № 2(49). – С. 48 – 54.

18 Sarsenbi A.M., Tengaeva A.A. [On the basis properties of root functions of two generalized eigenvalue problems](http://www.scopus.com/scopus/inward/record.url?eid=2-s2.0-84859756791&partnerID=K84CvKBR&rel=3.0.0&md5=fc08b31053c77f77bff026e232cadaa2) // Differential Equations. – 2012. – V 48.- № 2. – P. 306 – 308.

19 Przevorska - Rolewicz D. Equations with transformed argument an Algebraic approach. – Warszawa, 1973. – 354 р.

20 Ashyralyev A., Sarsenbi A.M. Well-posedness of an elliptic equation with involution // Electronic Journal of Differential Equations. – 2015. – Vol. 2015.-№ 284. -P. 1 – 8.

21 Ashyralyev A., Sarsenbi A.M. Well-Posedness of a Parabolic Equation with Involution //Numerical Functional Analysis and Optimization. – 2017. – P. 1–10. – Doi.org/10.1080/01630563.2017.1316997.

22 Steklov V.A. Osnovnye Zadachi Matematicheskoi Fiziki. – Moskva, 1983.

23 Il'in V.A. The solvability of mixed problems for hyperbolic and parabolic equations // Russ. Math. Surveys. – 1960. - № 15(2). – P. 85 – 142.

24 Chernyatin V.A. Refinement of an existence theorem for a classical solution of a mixed problem for a one-dimensional wave equation // Differential Equations. – 1985. – Vol. 21(9). – P. 1070 – 1075.

25 Khromov A.P. Behavior of the formal solution to a mixed problem for the wave equation // *Comp. Math Math. Phys*. – 2016. – Vol.56 (2). – P. 243 – 255.

26 Kritskov L.V., Sarsenbi A.M. Riesz basis property of system of root functions of second-order differential operator with involution // Differential Equations. – 2017. – Vol. 53, no. 1. – P. 33 – 46.

27 Przeworska-Rolewicz D. Some boundary value problems with transformed argument. //Commentarii Mathematici Helvetici – 1974. - 17: 451-457.

28 Evans LC. Partial Differential Equations. Graduate Studies in Mathematics.- Providence, RI, USA: AMS, 1998.

29 Koshlyakov N..S, Gliner E.B., Smirnov M.M. Differential Equations of Mathematical Physics. - Amsterdam, the Netherlands: North-Holland, 1964.

30 Sadybekov M.A., Torebek B.T., Turmetov B.K. Representation of Green’s function of the Neumann problem for a multi-dimensional ball //Complex Variables and Elliptic Equations – 2016. (61). – P. 104-123.

31 Sadybekov M.A., Torebek B.T., Turmetov B.K. Construction of Green’s function of the Neumann problem in a ball //Eurasian Mathematical Journal -2016.- 7 (2). – P. 102-107.

32 Karachik V.V., Turmetov B.K. On Green’s function of the Robin problem for the Poisson equation // Advances in Pure and Applied Mathematics – 2018. – 2018. - P 1-11.

33 Sadybekov M.A., Torebek B.T., Turmetov B.K. Representation of Green’s function of the Neumann problem for a multi-dimensional ball// Complex Variables and Elliptic Equations - 2016. – 61. – P. 104-123.

**ПРИЛОЖЕНИЕ А**

**Список опубликованных работ в журналах с импакт-фактором.**

2018 г.

1 Borodinova D. Yu. and Kritskov L. V. Estimates of the Root Functions of a One-Dimensional Schrodinger Operator with a Strong Boundary Singularity // Differential Equations. – 2018. – Vol. 54, no. 5. – P. 567–577 (Q2)

2 Kritskov L.V., Sarsenbi A.M. Equiconvergence Property for Spectral Expansions Related to Perturbations of the Operator  with Initial Data// Filomat – 2018, (32:3). – P. 1069-1078. doi.org/10.2298/FIL1803069K. (Q2)

2019 г.

3 Kritskov L.V., Sadybekov M.A., Sarsenbi A.M., Properties in Lp of root functions for a nonlocal problem with involution. //Turkish Journal of Mathematics - 2019, (43: 393). – P. 1809-12401 © TÜBİTAK doi:10.3906/mat (Q3)

4 Kirane M., Sadybekov M.A., Sarsenbi A.A., On an inverse problem of reconstructing a subdiffusion process from nonlocal data// Mathematical Methods in the Applied Sciences. – 2019. – Vol. 42. Issue - 6. – P. 2043-2052. (Q 2)

5 Karachik V.V., Sarsenbi A.M., Turmetov B.K., On the solvability of the main boundary value problems for a nonlocal Poisson equation.// Turkish Journal of Mathematics – 2019, (43) – P. 1604 – 1625 (Q3)

2020 г.

6 L. V. Kritskov Uniform Convergence of Spectral Expansions on the Entire Real Line for General Even-Order Differential Operators // Differential Equations – 2020. - Vol. 56, No. 4. - P. 426–437. (Q3)

**Список опубликованных работ в журналах, входящих в базу Web of Science.**

2018 г.

7 Kritskov L.V., Sadybekov M.A., Sarsenbi A.M., Nonlocal spectral problem for a second-order differential equation with an involution// Bulletin of the Karaganda University. Mathematics¿ series. Special issue.- 2018. - 3(91). - P. 53-61.

8 Sarsenbi A.A. Unconditional basicity of eigenfunctions’ system of Sturm-Liouville operator with an involutional perturbation// Bulletin of the Karaganda University. Mathematics¿ series. Special issue. - 2018. - 3(91). - P. 117-127

9 [Abdizhahan Manapuly Sarsenbi](https://aip.scitation.org/author/Sarsenbi%2C+Abdizhahan+Manapuly), and [Madina Utelbayeva](https://aip.scitation.org/author/Utelbayeva%2C+Madina), [The Green’s function and the basis property of the eigenfunctions of a boundary value problem with involution](https://aip.scitation.org/doi/10.1063/1.5049069)

//AIP Conference Proceedings. -2018. – 1997. – P. 020075. <https://doi.org/10.1063/1.5049069>

10 [Abdisalam Sarsenbi](https://aip.scitation.org/author/Sarsenbi%2C+Abdisalam) [Existence of Green’s function of the boundary value problem with involution//](https://aip.scitation.org/doi/10.1063/1.5049023)  AIP Conference Proceedings. 2018.– 1997.- P. 020029.  [doi.org/10.1063/1.5049023](https://doi.org/10.1063/1.5049023)

11 Sarsenbi A.А. Solvability conditions of mixed problems for equations

of parabolic type with involution// Bulletin of the Karaganda University. Mathematics¿ series. -2018. - 4(92).- P. 87-93

**Список опубликованных работ в журналах, входящих в базу Scopus.**

12 Сарсенби А.А., Турметов Б. Х., Базисность системы собственных функций дифференциального оператора второго порядка с инволюцией, *Вестн. Удмуртск. ун-та. Матем. Мех. Компьют. науки*, **29**:2 (2019), 183–196 (процентиль по CiteScore в базе Scopus 51)

**Список опубликованных работ в зарубежных изданиях.**

13 Сарсенби А. А., Некорректная задача для уравнения типа теплопроводности с инволюцией // Журнал Средневолжского математического общества. — 2019. — Т. 21, № 1. — С. 48–59.

14 Sadybekov M.A., Sarsenbi А.А., On one inverse problem of reconstructing a subdiffusion process with degeneration from nonlocal data // Доклады Адыгской (Черкесской) Mеждународной Академии наук. – 2019. – Т. 19. - № 1. – С. 31 – 41.

**Список опубликованных работ в изданиях международных конференций.**

15 A.M. Sarsenbi, L.V. Kritskov, Criterion for the unconditional basicity of the root functions related to the second-order di\_erential operator with involution. THE ABSTRACT BOOK of the conference ICAAM 2018, 6-9 September, 2018, Near East University, Lefkosa (Nicosia), Mersin 10, Turkey.

16 Sarsenbi А.А., Solvability of a Mixed Problem for a Heat Equation with an Involution Perturbation //The abstract book of the 3rd International conference of mathematical science ICMS 2019. - Maltepe University, Istanbul, Turkey: 4-8 September, 2019. – P. 108.

17 Sarsenbi А.М., Utelbaeva М., Mixed Problem for a Wave Equation with an Involution Perturbation //The abstract book of the 3rd International conference of mathematical science ICMS 2019. - Maltepe University, Istanbul, Turkey: 4-8 September, 2019. – P. 109.

***ПРИЛОЖЕНИЕ В***

