

****

**РЕФЕРАТ**

Есеп 32 б., 1 кіт., 14 дереккөз, 2 қосымша.

ТОЛҚЫНДЫҚ ТЕҢДЕУІ, ЖЫЛУӨТКІЗГІШТІК ТЕҢДЕУІ, КОШИ ЕСЕБІ, БЕССЕЛЬ ОПЕРАТОРЫ, ЯКОБИ ОПЕРАТОРЫ, ПСЕВДО-ДИФФЕРЕНЦИАЛДЫҚ ОПЕРАТОРЛАР

Бұл зерттеу жобасының негізгі мақсаты – Якоби және Бессель операторлары арқылы туындаған біртекті емес толқын және жылуөткізгіштік теңдеулер үшін Коши есебін зерттеу және Якоби және Бессель операторлары арқылы туындаған псевдо-дифференциалдық операторлардың теориясын дамыту.

2020 жылғы аралық есепте төмендегі жәңа ғылымыи нәтижелер алынды:

Бессель операторы арқылы туындаған біртекті емес толқын теңдеуі үшін Коши есебінің шешімінің бар және жалғыз екендігі дәлелденді.

Якоби операторы арқылы туындаған біртекті емес толқын теңдеуі үшін Коши есебінің шешімінің бар және жалғыз екендігі дәлелденді.

Якоби операторы арқылы туындаған біртекті емес жылуөткізгіштік теңдеуі үшін Коши есебінің шешімінің бар және жалғыз екендігі дәлелденді.

Псевдо-дифференциалдық операторлардың классикалық теориясы зерттелді. Атап айтқанда, композиция теоремасы, композиция операторының символы t және λ айнымалыларына тәуелді болған кезде, зерттелді.

**РЕФЕРАТ**

Отчет 32 с., 1 кн., 14 источн., 2 прил.

ВОЛНОВОЕ УРАВНЕНИЕ, УРАВНЕНИЕ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ, ЗАДАЧА КОШИ, ОПЕРАТОР БЕССЕЛЯ, ОПЕРАТОР ЯКОБИ, ПСЕВДО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ОПЕРАТОРЫ

Основной целью данного исследовательского проекта является исследование задачи Коши для неоднородных волновых и теплопроводных уравнений, порожденных операторами Якоби и Бесселя и развита теория псевдо-дифференциальных операторов порожденного операторами Якоби и Бесселя.

В этом промежуточном отчете за 2020 год получены следующие новые научные результаты:

Доказано существование и единственность решения задачи Коши для неоднородного волнового уравнения, порожденного оператором Бесселя.

Доказано существование и единственность решения задачи Коши для неоднородного волнового уравнения, порожденного оператором Якоби.

Доказано существование и единственность решения задачи Коши для неоднородного уравнения теплопроводности, порожденного оператором Якоби.

Изучена классическая теория псевдодифференциальных операторов. В частности, теорема композиции, когда символ оператора композиции зависит как от переменного t, так и от переменного λ.

**СОДЕРЖАНИЕ**

|  |  |
| --- | --- |
| ВВЕДЕНИЕ.........…………………………………………………………………………… | 6 |
| ОСНОВНАЯ ЧАСТЬ ОТЧЕТА О НИР……………………………………………………. | 8 |
| 1 Исследование задачи Коши для неоднородных волновых и теплопроводных  уравнений, порожденных операторами Якоби и Бесселя................................................. | 8 |
| 1.1 Задача Коши для неоднородного волнового уравнения, порожденный  операторами Бесселя…………………………………………………………………... | 8 |
| 1.2 Задача Коши для неоднородного волнового уравнения, порожденный  операторами Якоби...………………………………………………………………….. | 12 |
| 1.3 Задача Коши для неоднородного уравнения теплопроводности, порожденный  операторами Якоби……………………………………………………………………. | 18 |
| 2 Теорема композиции известной в классической теории ПДО…………………...……... | 22 |
| 2.1 Исследование теоремы композиции известной в классической теории ПДО……… | 22 |
| 2.2 Исследование теоремы композиции, когда символ композиции двух ПДО зависит  от t и λ………………………………………………………………………………… | 24 |
| ЗАКЛЮЧЕНИЕ……………………………………………………………..………………. | 26 |
| СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ.………………………………………. | 27 |
| ПРИЛОЖЕНИЕ A - Список опубликованных работ ……………………………………. | 28 |
| ПРИЛОЖЕНИЕ B - Техническая спецификация и календарный план работ …………. | 29 |

**ВВЕДЕНИЕ**

В разделе 1 рассматриваются задачи Коши для неоднородных волновых и тепловых уравнений, порождаемых операторами Якоби и Бесселя, которые задаются выражениями

где , и

соответственно. Для получения дополнительной информации об анализе, связанном с операторами Якоби и Бесселя, мы рекомендуем читателям [1-10].

В подразделе 1.1 рассматривается задача Коши для неоднородного волнового уравнения, порожденного оператором Бесселя:

В подразделе 1.2 рассматривается задача Коши для неоднородного волнового уравнения, порожденного оператором Якоби:

В подразделе 1.3 рассматривается задача Коши для неоднородного уравнения теплопроводности, порожденного оператором Якоби:

В разделе 2 мы дадим некоторые понятия из теории псевдо-дифференциальных операторов (ПДО) и изучим классическую теорему композиции, когда символ оператора композиции зависит как от переменных , так и от . В качестве определения ПДО возьмем следующее выражение

где – его символ. Мы рекомендуем читателям ознакомиться с книгами по теории ПДО М. А. Шубина [11], м. Тейлора [12], а также М. Ружанского, В. Турунена [13].

В приложении А приведен список опубликованных работ. В приложении Б приведен техническая спецификация и календарный план работ.

**ОСНОВНАЯ ЧАСТЬ ОТЧЕТА О НИР**

**1 Исследование задачи Коши для неоднородных волновых и теплопроводных уравнений, порожденных операторами Якоби и Бесселя**

В этом разделе рассматривается задача Коши для неоднородного волнового уравнения, порожденного оператором Бесселя, заданным выражением

(1.1)

где . Оператор (1.1) широко проанализирован в работе [10]. В книге [10, Глава 5] автор рассмотрел преобразование Ханкеля в счетно-полинормированном пространстве . Между преобразованием Ханкеля и (1.1) существует формула коммутации.

Кроме того, в этом разделе изучены задачи Коши для неоднородного волнового уравнения и для уравнения теплопроводности, порожденного оператором Якоби на ,

**1.1** **Задача Коши для неоднородного волнового уравнения, порожденный операторами Бесселя**

В этом подразделе рассматривается задача Коши для неоднородного волнового уравнения, порожденного оператором Бесселя (1.1).

Определение 1.1 является пространством всех комплекснозначных гладких функций и для каждой пары с полунормами

где .

Лемма 1.2 – полное пространство. Таким образом, это пространство Фреше

Давайте введем следующие линейные операторы:

Тогда мы можем переписать (1.1) следующим образом

- это непрерывное линейное отображение в виде

Если , то для каждого мы можем определить обычное преобразование Ханкеля в виде

(1.2)

Здесь ядро является собственной функцией оператора .

Лемма 1.3[10, Лемма 5.4-1, 139 с.] Предположим что и . Тогда

Теперь мы дадим обратное преобразование для (см [11, стр. 456]).

Теорема 1.4Пусть . Если – ограничена в окрестности точки , если и если определяется (0.1.5), то

Теперь мы можем рассмотреть задачу Коши для неоднородного волнового уравнения, порожденного оператором Бесселя

(1.3)

где – положительная постоянная, со следующими начальными условиями

(1.4)

и

(1.5)

Теорема 1.5 Предположим, что и . Тогда задача (1.3) – (1.5) имеет единственное решение и это может быть представлено следующим образом

где является собственной функцией оператора Бесселя .

Доказательство. Используя преобразование Ханкеля, мы можем показать единственность решения, если решение существует. Во-первых, мы доказываем существование решений. После использования преобразования Ханкеля (1.2) и леммы 1.3 для (1.3)-(1.5) получаем

(1.6)

(1.7)

(1.8)

Решение уравнения (1.6) имеет вид

(1.9)

Используя начальные условия (1.7)-(1.8) для (1.9), мы имеем

(1.10)

После использования обратного преобразования Хенкеля на (1.10) получаем, что решение задачи (1.3)-(1.5) задается формулой

Теперь мы докажем, что , если и . обозначает для некоторой положительной константы , не зависящей от и . Принимая во внимание определение , мы получаем

Более того, у нас есть

Наконец, мы получаем

и

Таким образом, мы имеем

Суммируя, мы получаем

**1.2 Задача Коши для неоднородного волнового уравнения, порожденный операторами Якоби**

В этом подразделе рассматривается задача Коши для неоднородного волнового уравнения, порожденного оператором Якоби на , заданного выражением

(1.11)

где , , и . В 1972 году гармонический анализ, связанный с выражением (1.5), был впервые введен M. Flensted-Jensen [2]. Получено обобщение классической теоремы Paley-Wiener и свойства преобразования Фурье на множестве функций Шварца. В работах [3, 4], был рассмотрен случай и в работе [5] авторы изучили исчисление для случая . При дифференциальный оператор Якоби сводится к .

Для каждого и , Функция Якоби определяется по формуле

где является Гипергеометрическая функция Гаусса. Функция Якоби является единственным решением дифференциального уравнения

У нас есть следующие свойства функции ([2,3]):

(i) Для с :

(ii) Для всехl , существует такое что для всех и ,

(iii) Существует такое что для всех , , и

Пусть – пространство измеримых функций на такое, что

где . Пусть – пространство измеримых функций на такое, что

где Здесь, определяется по формуле

Для нашего удобства мы будем использовать и вместо и соответственно.

Если тогда преобразование Фурье-Якоби для определяется ([2])

(1.12)

Обратное преобразование Фурье-Якоби задается формулой

(1.13)

У нас есть формула коммутации

Теперь мы можем рассмотреть задачу Коши для неоднородного волнового уравнения, порожденного оператором Якоби

(1.14)

где – положительная постоянная, со следующими начальными условиями

(1.15)

и

(1.16)

Теорема 1.6 Предположим, что и . Тогда задача (1.14) – (1.16) имеет единственное решение , который может быть представлен формулой

где – функция Якоби.

Доказательство. После использования преобразования Фурье-Якоби (1.12) с обеих сторон (1.14) – (1.16), мы получаем

(1.17)

(1.18)

(1.19)

Решение проблемы (1.17)-(1.19)

Используя обратное преобразование Фурье-Якоби (1.13) мы получаем решение проблемы (1.14) – (1.16)

Теперь мы докажем что .

Здесь,

и

Затем мы получаем

Наконец, мы получаем

**1.3 Задача Коши для неоднородного уравнения теплопроводности, порожденный операторами Якоби**

В этом подразделе мы рассмотрим задачу Коши для неоднородного уравнения теплопроводности, порожденного оператором Якоби

(1.20)

где – положительная постоянная, с начальным условием

(1.21)

Решение задачи (1.9) – (1.10) можно сформулировать следующей теоремой:

Теорема 1.7 Предположим, что и . Тогда задача (1.20) – (1.21) имеет единственное решение , который может быть представлен формулой

где – функция Якоби.

Доказательство. После использования преобразования Фурье-Якоби (1.12) с обеих сторон (1.20) – (1.21), мы получаем

(1.22)

(1.23)

Решение проблемы (1.17)-(1.19)

Используя обратное преобразование Фурье-Якоби (1.13) мы получаем решение проблемы (1.22) – (1.23)

Теперь мы докажем, что .

Таким образом, мы имеем

Наконец, мы получаем

**2 Теорема композиции известной в классической теории ПДО**

**2.1 Исследование теоремы композиции известной в классической теории ПДО**

В этом разделе мы дадим некоторые понятия из теории ПДО и теоремы композиции. Мы рекомендуем читателям ознакомиться с книгами по теории ПДО М. А. Шубина и М. Тейлора [11, 12]. Здесь мы используем обозначения из книги М. Ружанского, В. Турунена [13].

Пусть – измеримое подмножество .

Определение 2.1 (- пространства) Пусть . Тогда – пространство всех измеримых функций , которые имеют конечную норму, заданную

В случае, говорят, что он находится в если она измерима и существенно ограничена, т. е.

Здесь определяется как наименьшее такое, что почти для всех .

В частности, является пространством абсолютно интегрируемых функций на .

Определение 2.2 (Преобразование Фурье в ) Для мы определяем его преобразование Фурье следующим образом

Оператор является ограниченным линейным оператором.

Для мультииндексов и с числами , мы определяем

и .

Определение 2.3 (Пространство Шварца ) Пространство Шварца является пространством быстро убывающих функций, т. е. Мы говорим, что если гладко на и если

для всех мультииндексов .

Теорема 2.4 (Обратная формула Фурье) Преобразование Фурье является изоморфизмом в , чье обратное задается

Эта формула называется обратной формулой Фурье, а обратное преобразование Фурье обозначается

Таким образом, мы можем сказать, что

Возьмем следующую формулу в качестве определения псевдо-дифференциального оператора (ПДО) с символом :

Определение 2.5 (Классы символов ) Пусть . Мы скажем, что если гладко на и если

для всех и всех .

В частности, обозначим .

Теорема 2.6 (Композиция ПДО) Пусть

Тогда существует некий символ такое что

Более того, мы имеем асимптотическую формулу

это означает, что для всех мы имеем

**2.2 Исследование теоремы композиции, когда символ композиции двух ПДО зависит от t и λ**

В этом подразделе мы приводим формулу для символа оператора композиции , когда символ зависит от переменных и

Пусть у нас есть

и

Затем, поместив в , мы получим

с

Здесь – преобразование Фурье относительно первой переменной.

**ЗАКЛЮЧЕНИЕ**

В рамках этого проекта были реализованы все запланированные мероприятия на 2020 год. За отчетный период были получены следующие новые результаты: доказано существование и единственность решения задачи Коши для неоднородного волнового уравнения, порожденного оператором Бесселя; доказано существование и единственность решения задачи Коши для неоднородного волнового уравнения, порожденного оператором Якоби; доказано существование и единственность решения задачи Коши для неоднородного уравнения теплопроводности, порожденного оператором Якоби.

В течение отчетного периода изучена классическая теория псевдодифференциальных операторов. В частности, теорема композиции, когда символ оператора композиции зависит как от переменных t, так и от λ.

Отметим, что результаты представленного отчета частично опубликованы в одной работе в журнале со ВТОРОГО квартиля по базе данных Web of Science и/или SCOPUS.

В целом, работа носит теоретический характер.

**СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ**

1 Assal M. Generalized wave equations in the setting of Bessel-Kingman hypergroups // An International Journal for Theory and Applications. – 2008. – Vol. 11. – P. 249-257.

2 Flensted-Jensen M. Paley-Wiener type theorems for a differential operator connected with symmetric spaces // Ark. Mat. – 1972. – Vol. 10. – P. 143–162.

3 Flensted-Jensen M., Koorwinder T.H. The convolution structure for Jacobi function expansions // Ark. Mat. – 1973. – Vol. 11. – P. 245-262.

4 Flensted-Jensen M., Koorwinder T.H. Jacobi functions: the addition formula and the positivity of dual convolution structure // Ark. Mat. – 1979. – Vol. 17, № 1. – P. 139-151.

5 Koorwinder T.H. A new proof of a Paley-Wiener type theorem for the Jacobi transform // Ark. Mat. – 1975. – Vol. 13, № 1. – P. 145-159.

6 Pathak R. S., Pandey P. K. A class of pseudo-differential operators associated with Bessel operators // J. Math. Anal. Appl. – 1995. – Vol. 196. – P. 736-747.

7 Pathak R. S., Pathak S. Certain pseudo-differential operator associated with the Bessel operator // Indian J. Pure Appl. Math. – 2000. – Vol. 31. – P. 309-317.

8 Pathak R. S., Pandey P. K. Sobolev Type Spaces Associated with Bessel Operators // Journal of Mathematical Analysis and Application. – 1997. – Vol. 215. – P. 95-111.

9 Pathak R. S., Prasad A. Continuity of Pseudo-differential Operators Associated with the Bessel Operator in Some Gevrey Spaces // Applicable Analysis. – 2002. – Vol. 81. – P. 637-662.

10 Zemanian A. H. Generalized Integral Transformations. – New York: Interscience, 1968. – 300 p.

11 Watson G. N. A treatise on the theory of Bessel functions – Cambridge: Cambridge at the university press, 1922. – 812 p.

12 Шубин М.А. Псевдодифференциальные операторы и спектральная теория. – Москва: Наука, 1978. – 280 с.

13 Taylor M. Pseudo differential operators. – Princenton University, 1981. – 451 p.

14 Ruzhansky M., Turunen V. Pseudo-differential operators and symmetries. – Berlin: Birkhäuser Basel, 2010. – 710 p.

**ПРИЛОЖЕНИЕ A**

**Список опубликованных работ**

1 [Altybay A.](https://www.scopus.com/authid/detail.uri?authorId=57212766696), [Ruzhansky M.](https://www.scopus.com/authid/detail.uri?authorId=6603327173), [Tokmagambetov N.](https://www.scopus.com/authid/detail.uri?authorId=55618129900) A parallel hybrid implementation for the 2D acoustic wave equation // International Journal of Nonlinear Sciences and Numerical Simulation. – 2020. Статья в печати.

URL: https://www.degruyter.com/view/journals/ijnsns/ahead-of-print/article-10.1515-ijnsns-2019-0227/article-10.1515-ijnsns-2019-0227.xml

Q2 (Mathematics, Applied) Web of Sciences JIF Percentile 2019 = 66;

Q2 (Applied Mathematics) Scopus CiteScore Percentile 2019 =59;

Q1 (Engineering) Scopus SJR 2019 = 0,437.

**ПРИЛОЖЕНИЕ Б**

**Техническая спецификация и календарный план работ** 





