

Алматы 2021**СПИСОК ИСПОЛНИТЕЛЕЙ**

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  | Руководитель НИР,  главный науч. сотр.,  к.ф.-м.н., асс. проф. (доцент) | 11.10.2021  подпись, дата | Ж.М. Кадирбаева  (введение, раздел 1, 2, 3, 4, заключение) |
|  | Исполнители: | | |
|  | Ведущий научн. сотр.,  к.ф.-м.н., асс. проф. (доцент) | 11.10.2021  подпись, дата | Э.А. Бакирова  (раздел 1, 2, 3) |
|  | Научн. сотр.,  магистр | 11.10.2021  подпись, дата | С.Г. Каракенова  (раздел 1) |
|  | Нормоконтролер,  к.ф.-м.н. | 11.10.2021 | М.А. Сахауева |
|  |  | подпись, дата |  |
|  |  | | |
|  |  | | |
|  |

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

**РЕФЕРАТ**

Отчет 37 с., 1 кн., 27 источн., 2 прил.

НАГРУЖЕННОЕ ОБЫКНОВЕННОЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ, МНОГОТОЧЕЧНАЯ КРАЕВАЯ ЗАДАЧА, МЕТОД ПАРАМЕТРИЗАЦИИ, ЗАДАЧА С ПАРАМЕТРОМ, ЧИСЛЕННЫЙ МЕТОД

Объектом исследования являются линейные многоточечные краевые задачи для существенно нагруженных обыкновенных дифференциальных уравнений.

Цель исследования - установление условий разрешимости и разработка численных методов решения многоточечных краевых задач для существенно нагруженных обыкновенных дифференциальных уравнений.

Применены метод параметризации, современные методы теории дифференциальных уравнений и функционального анализа.

Получены следующие результаты:

Построен алгоритм нахождения решения линейной двухточечной краевой задачи для существенно нагруженных обыкновенных дифференциальных уравнений;

Построен алгоритм нахождения решения линейной многоточечной краевой задачи для существенно нагруженных обыкновенных дифференциальных уравнений и установлены условия его сходимости;

Установлена однозначная разрешимость линейных многоточечных краевых задач для существенно нагруженных обыкновенных дифференциальных уравнений;

Разработаны численные методы решения линейных многоточечных краевых задач для существенно нагруженных обыкновенных дифференциальных уравнений.

Результаты исследований имеют теоретическое значение и могут быть использованы при математическом моделировании задач для нагруженных дифференциальных уравнений.

Научные публикации. По результатам исследований с начала октября 2020 года сотрудниками проекта опубликована 5 научных статей, в том числе:

* 1 статья (Article) в международном рейтинговом журнале, входящем в БД Scopus;
* 2 статьи в международных рейтинговых журналах (входящих в БД Web of Science Clarivate Analytics, Emerging Sources Citation Index) без импакт-фактора;
* 2 статьи в казахстанских журналах, рекомендованных КОКСОН МОН РК.

**РЕФЕРАТ**

Есеп 37 б., 1 кітап, 27 әдебиет көздері, 2 қос.

ЖҮКТЕЛГЕН ЖӘЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛДЫҚ ТЕҢДЕУ, КӨП НҮКТЕЛІ ШЕТТІК ЕСЕП, ПАРАМЕТРЛЕУ ӘДІСІ, ПАРАМЕТРІ БАР ЕСЕП, САНДЫҚ ӘДІС

Зерттеу нысаны елеулі түрде жүктелген жәй дифференциалдық теңдеулер үшін сызықты көп нүктелі шеттік есептер болып табылады.

Зерттеу мақсаты - елеулі түрде жүктелген жәй дифференциалдық теңдеулер үшін көп нүктелі шеттік есептерді шешудің сандық әдістерін әзірлеу және шешілімділік шарттарын тағайындау.

Параметрлеу әдісі, дифференциалдық теңдеулер мен функционалдық анализдің қазіргі әдістері қолданылған.

Келесі нәтижелер алынды:

Елеулі түрде жүктелген жәй дифференциалдық теңдеулер үшін сызықты екі нүктелі шеттік есептердің шешімін табу алгоритмі құрылды;

Елеулі түрде жүктелген жәй дифференциалдық теңдеулер үшін сызықты көп нүктелі шеттік есептердің шешімін табу алгоритмі құрылды және оның жинақтылық шарттары тағайындалды;

Елеулі түрде жүктелген жәй дифференциалдық теңдеулер үшін сызықты көп нүктелі шеттік есептердің бірмәнді шешілімділігі тағайындалды;

Елеулі түрде жүктелген жәй дифференциалдық теңдеулер үшін сызықты көп нүктелі шеттік есептерді шешудің сандық әдістері жасалды.

Зерттеу нәтижелерінің теориялық маңызы бар және жүктелген дифференциалдық теңдеулер үшін қолданбалы есептерді математикалық моделдеу кезінде пайдаланылуы мүмкін.

Ғылыми басылымдар. Зерттеу нәтижелері бойынша 2020 жылдың қазан айынан басынан бастап жоба қызметкерлері 5 ғылыми мақалалар жариялады, оның ішінде:

* 1 мақала (Article) Scopus ДБ кіретін халықаралық рейтингтік журналда;
* 2 мақала импакт-факторсыз халықаралық рейтингтік журналдарда (WEB of Science Clarivate Analytics, Emerging Sources Citation Index ДҚ-ға кіретін);
* 2 мақала ҚР БҒМ БҒССҚК ұсынған қазақстандық журналдарда.

**СОДЕРЖАНИЕ**

ВВЕДЕНИЕ ...…………………………………………………… …...………...................…....6

ОСНОВНАЯ ЧАСТЬ ОТЧЕТА О НИР .....................................................................................8

1 Алгоритм нахождения решения и условия разрешимости двухточечных краевых задач для существенно нагруженных обыкновенных дифференциальных уравнений…................8

2 Алгоритм нахождения решения линейных многоточечных краевых задач для существенно нагруженных обыкновенных дифференциальных уравнений….....................16

3 Разрешимость линейных многоточечных краевых задач для существенно нагруженных обыкновенных дифференциальных уравнений…....................................................................21

4 Разработка численных методов решения линейных многоточечных краевых задач для существенно нагруженных обыкновенных дифференциальных уравнений….....................26

ЗАКЛЮЧЕНИЕ ..………….…..…………………………… …….………………………........30

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ ……………...…………..........................31

ПРИЛОЖЕНИЕ А - Список опубликованных работ .........……………...………..................34

ПРИЛОЖЕНИЕ Б - Календарный план работ …………………………………..…….…......35

**ВВЕДЕНИЕ**

Отчет содержит исследования по теории многоточечных краевых задач для существенно нагруженных обыкновенных дифференциальных уравнений.

Математическое описание разнообразных динамических процессов управления, в которых будущее течение процессов зависит не только от настоящего, но и существенно определяется предысторией процесса, осуществляется при помощи обыкновенных дифференциальных уравнений с памятью различных видов, называемых также уравнениями с последействием или  нагруженными дифференциальными уравнениями. Нагруженные дифференциальные уравнения используются при решении задач долгосрочного прогнозирования и регулирования уровня грунтовых вод и почвенной влаги. Нагруженные дифференциальные уравнения имеют ряд особенностей, которые должны быть учтены при постановке задач для этих уравнений и создании методов их решений. Одним из особенностей нагруженных дифференциальных уравнений является то, что такие уравнения могут быть неразрешимыми без дополнительных условий.

При изучении движущейся точки наблюдения в устройствах обратной связи часто возникают существенно нагруженные дифференциальные уравнения, где порядок производной в нагруженном слагаемом равен или выше порядка дифференциальной части уравнения. При этом, в отличие от ранее изученных нагруженных дифференциальных уравнений, нагруженное слагаемое в уравнении не будет являться некоторым возмущением его дифференциальной части.

Несмотря на большое количество работ, посвященных исследованию и решению краевых задач для нагруженных дифференциальных уравнений, многие вопросы, связанные с разрешимостью краевых задач для существенно нагруженных обыкновенных дифференциальных уравнений, остаются нерешенными. Расширение сфер применения существенно нагруженных дифференциальных уравнений, и существование нерешенных проблем приводят к необходимости построения новых эффективных методов исследования и решения задач для этих уравнений.

В работе предложены методы нахождения приближенных решений линейных многоточечных краевых задач для существенно нагруженных обыкновенных дифференциальных уравнений и установлены условия существования решения в терминах исходных данных.

Принципиальное отличие идей и научная значимость результатов работы от существующих аналогов заключается в построении эффективных алгоритмов нахождения их решений.

Применяемая методология для научных исследований оценивается высоким качеством: использованы метод параметризации и конструктивные методы решения линейных многоточечных краевых задач для существенно нагруженных обыкновенных дифференциальных уравнений.

Поставленные в проекте задачи на 2020-2021 гг. полностью выполнены.

К сильным сторонам проекта относятся: используются методы, разработанные руководителем проекта и учеными Казахстана; научные результаты по проведенным исследованиям опубликованы в журналах, входящих в список рекомендуемых изданий Комитета по обеспечению качества в сфере образования и науки МОН РК и в рецензируемом научном издании имеющем процентиль по CiteScore в базе Scopus не менее 50 (пятидесяти).

Проведенные исследования и результаты соответствуют календарному плану научно-исследовательских работ по теме № AP08955489: "Методы решения многоточечных краевых задач для систем нагруженных дифференциальных уравнений" на 2020-2022 годы со сроком реализации 12 месяцев Специализированного научного направления 8.1: «Фундаментальные и прикладные исследования в области математики и механики» Приоритета 8: «Научные исследования в области естественных наук».

В настоящем отчете отражены исследования по теме "Методы решения многоточечных краевых задач для систем нагруженных дифференциальных уравнений" за 2020-2021 годы. Полученные результаты являются дальнейшим развитием теории краевых задач для существенно нагруженных обыкновенных дифференциальных уравнений.

За 2020 год отчетного периода 2020-2022 гг. со сроком реализации 12 месяцев по теме был подготовлен промежуточный отчет о НИР "Методы решения многоточечных краевых задач для систем нагруженных дифференциальных уравнений", инв №0220РК01618.

**ОСНОВНАЯ ЧАСТЬ ОТЧЕТА О НИР**

**1 Алгоритмы нахождения решения и условия разрешимости двухточечных краевых задач для существенно нагруженных обыкновенных дифференциальных уравнений**

Нагруженные дифференциальные уравнения используются при решении задач долгосрочного прогнозирования и регулирования уровня грунтовых вод и почвенной влаги [1-4]. Отметим, что нагруженные дифференциальные уравнения в литературе также называются граничными дифференциальными уравнениями [5, 6]. Также нагруженным дифференциальным уравнением называли дифференциальное уравнение, в которое входят значения искомой функции и ее производных в фиксированных точках области [7]. Различные задачи для нагруженных дифференциальных уравнений и методы нахождения их решений рассмотрены в [8-26].

Данный раздел посвящен линейной двухточечной краевой задаче для существенно нагруженных дифференциальных уравнений. Используя свойства существенно нагруженного дифференциального уравнения рассматриваемая задача сводится к двухточечной краевой задаче для нагруженных дифференциальных уравнений. Данная задача исследуется методом параметризации [27]. Построены алгоритмы нахождения решений краевых задач для нагруженных дифференциальных уравнений и получены условия их осуществимости.

Результаты раздела соответствуют пункту 1.1. Календарного плана на 2020 год.

На для существенно нагруженных обыкновенных дифференциальных уравнений:

(1.1)

рассматриваем линейную двухточечную краевую задачу с условием

(1.2)

где -матрицы , , (), и -вектор-функция непрерывны на , и - постоянные -матрицы, – постоянный -вектор, и , .

Через обозначим пространство непрерывных функций с нормой .

Непрерывно дифференцируема на функция называется решением задачи (1.1), (1.2), если она удовлетворяет системе существенно нагруженных дифференциальных уравнений (1.1) и краевому условию (1.2).

Значение производной в точке нагружения можно найти из системы дифференциальных уравнений (1.1). Используя уравнение (1.1), определим

Потом

(1.3)

Предположим, что матрица обратима, тогда мы получим

(1.4)

Рассмотрим следующую линейную двухточечную краевую задачу для нагруженных дифференциальных уравнений

(1.5)

(1.6)

где

Приведем примеры, показывающие существенное влияние нагруженности на свойства задач. Рассмотрим задачу Коши для нагруженного дифференциального уравнения

(1.7)

(1.8)

Интегрируя уравнение (1.7), используя начальное условие (1.8) имеем

Так как то значение удовлетворяет равенству

Однако при равенство (1.9) не выполняется и задача Коши (1.7), (1.8) не имеет решения. В то же время задача Коши для линейной системы обыкновенных дифференциальных уравнений (без нагруженности) всегда имеет единственное решение.

На рассмотрим периодическую краевую задачу для обыкновенного дифференциального уравнения

Общее решение дифференциального уравнения имеет вид: Подставляя общее решение в краевые условия для определения получим соотношения: Так как, такое число не существует, то задача не имеет решения.

Теперь, добавив к правой части дифференциального уравнения нагруженность в точкеполучим периодическую краевую задачу для нагруженного дифференциального уравнения

решение которого имеет вид

Схема метода параметризации.

В настоящей работе краевая задача (1.5), (1.6) исследуется методом параметризации. Интервал разбиваем на подинтервалы точками нагружения:

.

Введем пространство систем функций где функций непрерывны на и имеют конечный левосторонний предел , с нормой .

Через обозначим сужение функции на -й интервал , т.е. для , и задача (1.5), (1.6) сведется к многоточечной краевой задаче для нагруженных дифференциальных уравнений

(1.10)

(1.11)

(1.12)

где (1.12) условия склеивания решения во внутренних точках разбиения.

Решением задачи (1.10) - (1.12) называется система функций , с непрерывно дифференцируемыми на функциями удовлетворяющими системе нагруженных дифференциальных уравнений (1.10) и условиям (1.11), (1.12).

Задачи (1.5), (1.6) и (1.10) - (1.12) эквивалентны в следующем смысле. Если - решение задачи (1.5), (1.6), то система функциий , где и является решением многоточечной краевой задачи (1.10) - (1.12). И наоборот, если система вектор-функций решение задачи (1.10) - (1.12), то функция определяемая равенствами , будет решением исходной задачи.

Введем обозначения и на каждом интервале произведем замену . Тогда задача (1.10) -(1.12) сведется к эквивалентной многоточечной краевой задаче для дифференциальных уравнений с параметрами

(1.13) (1.14)

(1.15)

(1.16)

Решением задачи (1.13) - (1.16) является пара с элементами

,

где функции непрерывно дифференцируемы на и при удовлетворяет системе обыкновенных дифференциальных уравнений (1.13) и условиям (1.14) – (1.16).

Задачи (1.5), (1.6) и (1.13) – (1.16) эквивалентны. Если пара с элементами , решение задачи (1.13) – (1.16), тогда , определямая соотношениями ,, будет решением задачи (1.5), (1.6). Наоборот, если решение задачи (1.5), (1.6), тогда пара где , и , будет решением задачи (1.13) – (1.16).

Однако задача (1.13) - (1.16) от задачи (1.10) - (1.12) отличается тем, что здесь появились начальные условия в точках которые позволяют при фиксированных определить функции из интегральных уравнений Вольтерра второго рода

В уравнении (1.17) вместо подставляя соответствующую правую часть и повторив этот процесс раз, получим

Введя обозначения

получим представление функции вида

(1.18)

Из (1.18) находим

Подставляя соответствующие правые части (1.18) в условия (1.15), (1.16), получим систему уравнений относительно неизвестных параметров

(1.19)

(1.20)

где единичная матрица размерности Обозначив через матрицу, соответствующей левой части системы (1.19), (1.20) и введя векторы

=,

запишем ее в виде

Таким образом, для нахождения неизвестных пар - решения задачи (1.13) - (1.16) имеем замкнутую систему уравнений (1.17), (1.21). Пара решение задачи (1.13) - (1.16), находится как предел последовательности пар определяемой по следующему алгоритму:

Шаг 0: Предполагая, что при выбранном матрица обратима, начальное приближение по параметру определим из уравнения т.е.

б) Используя компоненты вектора и решая задачи Коши (1.13), (1.14) при на интервалах , находим функции .

Шаг 1: Подставляя найденные в правую часть (1.21), из уравнения определим .

б) На отрезках решая задачи Коши (1.13), (1.14) при , находим функции . И т.д.

Продолжая процесс, наом шаге получаем систему пар Отметим, что в пункте б) при фиксированных значениях параметра решение задачи Коши находится отдельно на каждом интервале .

Условия сходимости алгоритма и однозначной разрешимости краевой задачи.

Теорема 1. Пусть при некотором матрица обратима и выполняются неравенства:

где ,

Тогда линейная двухточечная краевая задача для нагруженных дифференциальных уравнений (1.5), (1.6) имеет единственное решение.

**2 Алгоритм нахождения решения линейных многоточечных краевых задач для существенно нагруженных обыкновенных дифференциальных уравнений**

Исследована линейная многоточечная краевая задача для существенно нагруженных обыкновенных дифференциальных уравнений. Допуская обратимость матрицы, составленной по коэффициентам при значениях производной искомой функции в точках нагрузки, исследуемая задача сводится к многоточечной краевой задаче для нагруженного обыкновенного дифференциального уравнения. Разбиением интервала и введением дополнительных параметров линейная многоточечная краевая задача для нагруженных обыкновенных дифференциальных уравнений сводится к эквивалентной краевой задаче с параметром. Эквивалентная краевая задача с параметрами состоит из задачи Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений с параметрами, многоточечного условия и условия склеивания. Предложен алгоритм нахождения решения многоточечной краевой задаче для нагруженного обыкновенного дифференциального уравнения.

Результаты раздела соответствуют пункту 2.1. Календарного плана на 2021 год.

Рассмотрено на линейная многоточечная краевая задача для существенно нагруженных обыкновенных дифференциальных уравнений

(2.1)

(2.2)

где -матрицы , (), и -вектор-функция непрерывны на , () - постоянные -матрицы, – постоянный -вектор, и , .

Непрерывно дифференцируема на функция называется решением задачи (2.1), (2.2), если она удовлетворяет системе существенно нагруженных дифференциальных уравнений (2.1) и краевому условию (2.2).

Значения производных в точках можно найти из системы дифференциальных уравнений (2.1). Используя уравнение (2.1), определим :

(2.3)

Перепишем (2.3) в следующей форме

(2.4)

Здесь т.е.

где единичная матрица размерности .

Мы предполагаем, что матрица обратима. Обратную матрицу обозначим через , т.е. где Тогда из (2.4) можно однозначно определить Таким образом, компоненты вектора позволяют найти значения производных в точках .

Рассмотрим следующую линейную многоточечную краевую задачу для нагруженных дифференциальных уравнений

(2.5)

(2.6)

где

Краевая задача (2.5), (2.6) исследуется методом параметризации. Интервал разбиваем на подинтервалы точками нагружения: .

Введем пространство систем функций где функций непрерывны на и имеют конечный левосторонний предел , с нормой .

Через обозначим сужение функции на -й интервал , т.е. для , и введя обозначения и на каждом интервале произведем замену . Тогда задача (2.5), (2.6) сведется к эквивалентной многоточечной краевой задаче для дифференциальных уравнений с параметрами

(2.7) (2.8)

(2.9)

(2.10)

Решением задачи (2.7) - (2.10) является пара с элементами

,

где функции непрерывно дифференцируемы на и при удовлетворяет системе обыкновенных дифференциальных уравнений (2.7) и условиям (2.8) – (2.10).

Задачи (2.5), (2.6) и (2.7) - (2.10) эквивалентны. Если пара с элементами , решение задачи (2.7) - (2.10), тогда , определямая соотношениями ,, будет решением задачи (2.5), (2.6). Наоборот, если решение задачи (2.5), (2.6), тогда пара где , и , будет решением задачи (2.7) - (2.10).

В задаче (2.7) - (2.10) появились начальные условия в точках которые позволяют при фиксированных определить функции из интегральных уравнений Вольтерра второго рода

В уравнении (2.11) вместо подставляя соответствующую правую часть и повторив этот процесс раз, получим

(2.12)

где

Из (2.12) находим

Подставляя соответствующие правые части (2.12) в условия (2.9), (2.10), получим систему уравнений относительно неизвестных параметров

(2.13)

(2.14)

где единичная матрица размерности Обозначив через матрицу, соответствующей левой части системы (2.13), (2.14) и введя векторы

=,

запишем ее в виде

Пара решение задачи (2.7) - (2.10), находится как предел последовательности пар определяемой по следующему алгоритму:

Шаг 0: Предполагая, что при выбранном матрица обратима, начальное приближение по параметру определим из уравнения т.е.

б) Используя компоненты вектора и решая задачи Коши (2.7), (2.8) при на интервалах , находим функции .

Шаг 1: Подставляя найденные в правую часть (2.15), из уравнения определим .

б) На отрезках решая задачи Коши (2.7), (2.8) при , находим функции . И т.д.

Продолжая процесс, наом шаге получаем систему пар Отметим, что в пункте б) при фиксированных значениях параметра решение задачи Коши находится отдельно на каждом интервале .

**3 Разрешимость линейных многоточечных краевых задач для существенно нагруженных обыкновенных дифференциальных уравнений**

Исследована линейная многоточечная краевая задача для существенно нагруженных обыкновенных дифференциальных уравнений. Допуская обратимость матрицы, составленной по коэффициентам при значениях производной искомой функции в точках нагрузки, исследуемая задача сводится к многоточечной краевой задаче для нагруженного обыкновенного дифференциального уравнения. Предложен алгоритм нахождения решения многоточечной краевой задаче для нагруженного обыкновенного дифференциального уравнения и установлены условия его сходимости.

Результаты раздела соответствуют пункту 2.2. Календарного плана на 2021 год.

Рассмотрено на линейная многоточечная краевая задача для существенно нагруженных обыкновенных дифференциальных уравнений

(3.1)

(3.2)

где -матрицы , (), (), и -вектор-функция непрерывны на , () - постоянные -матрицы, – постоянный -вектор, и , .

Непрерывно дифференцируема на функция называется решением задачи (3.1), (3.2), если она удовлетворяет системе существенно нагруженных дифференциальных уравнений (3.1) и краевому условию (3.2).

Значения производных в точках можно найти из системы дифференциальных уравнений (3.1). Используя уравнение (3.1), определим :

(3.3)

Перепишем (3.3) в следующей форме

(3.4)

Здесь т.е.

где единичная матрица размерности .

Мы предполагаем, что матрица обратима. Обратную матрицу обозначим через , т.е. где Тогда из (3.4) можно однозначно определить Таким образом, компоненты вектора позволяют найти значения производных в точках .

Рассмотрим следующую линейную многоточечную краевую задачу для нагруженных дифференциальных уравнений

(3.5)

(3.6)

где

Задача (3.5), (3.6) исследуется методом параметризации. Интервал разбиваем на подинтервалы точками нагружения: .

Через обозначим сужение функции на -й интервал , т.е. для , и введя обозначения и на каждом интервале произведем замену . Тогда задача (3.5), (3.6) сведется к эквивалентной многоточечной краевой задаче для дифференциальных уравнений с параметрами

(3.7) (3.8)

(3.9)

(3.10)

Поскольку в правой части системы (3.7) стоит значение решения при , количество введенных параметров на единицу больше количества неизвестных функций.

Решением задачи (3.7) - (3.10) является пара с элементами

,

где функции непрерывно дифференцируемы на и при удовлетворяет системе обыкновенных дифференциальных уравнений (3.7) и условиям (3.8) – (3.10).

Задачи (3.5), (3.6) и (3.7) - (3.10) эквивалентны. Если пара с элементами , решение задачи (3.7) - (3.10), тогда , определямая соотношениями ,, будет решением задачи (3.5), (3.6). Наоборот, если решение задачи (3.5), (3.6), тогда пара где , и , будет решением задачи (3.7) - (3.10).

В задаче (3.7) - (3.10) появились начальные условия в точках которые позволяют при фиксированных определить функции из интегральных уравнений Вольтерра второго рода

В уравнении (3.11) вместо подставляя соответствующую правую часть и повторив этот процесс раз, получим

(3.12)

где

Из (3.12) находим

Подставляя соответствующие правые части (3.12) в условия (3.9), (3.10), получим систему уравнений относительно неизвестных параметров

(3.13)

(3.14)

где единичная матрица размерности Обозначив через матрицу, соответствующей левой части системы (3.13), (3.14) и введя векторы

=,

запишем ее в виде

Пара решение задачи (3.7) - (3.10), находится как предел последовательности пар определяемой по следующему алгоритму:

Шаг 0: Предполагая, что при выбранном матрица обратима, начальное приближение по параметру определим из уравнения т.е.

б) Используя компоненты вектора и решая задачи Коши (3.7), (3.8) при на интервалах , находим функции .

Шаг 1: Подставляя найденные в правую часть (3.15), из уравнения определим .

б) На отрезках решая задачи Коши (3.7), (3.8) при , находим функции . И т.д.

Продолжая процесс, наом шаге получаем систему пар Отметим, что в пункте б) при фиксированных значениях параметра решение задачи Коши находится отдельно на каждом интервале .

Условия сходимости алгоритма и однозначной разрешимости краевой задачи.

Теорема 2. Пусть при некотором матрица обратима и выполняются неравенства:

где ,

Тогда линейная многочечная краевая задача для нагруженных дифференциальных уравнений (3.5), (3.6) имеет единственное решение.

**4 Разработка численных методов решения линейных многоточечных краевых задач для существенно нагруженных обыкновенных дифференциальных уравнений**

В этом разделе на основе метода параметризации и численных методов разработан численный метод решения линейной многоточечной краевой задачи для существенно нагруженных обыкновенных дифференциальных уравнений и предложены алгоритмы их реализации. Разбиением интервала и введением дополнительных параметров линейная многоточечная краевая задача для нагруженных обыкновенных дифференциальных уравнений сводится к эквивалентной краевой задаче с параметром. Эквивалентная краевая задача с параметрами состоит из задачи Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений с параметрами, многоточечного условия и условия склеивания. Решение задачи Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений с параметрами строится с помощью фундаментальной матрицы дифференциального уравнения. Подставляя значения в соответствующих точках построенного решения в многоточечное условие и условие склеивания, составляется система линейных алгебраических уравнений относительно параметров. Предложен численный метод решения рассматриваемой задачи, основанный на решении построенной системы и метода Рунге-Кутта 4-го порядка для решения задачи Коши на подинтервалах.

Результаты раздела соответствуют пункту 2.3. Календарного плана на 2021 год.

Введение дополнительных параметров позволяет получить начальные данные для компонентов неизвестной системы функции и задача (3.7), (3.8) при фиксированных значениях параметров является задачей Коши. На интервалах задача Коши решается отдельно и для нахождения решения используется фундаментальная матрица.

Используя – фундаментальную матрицу дифференциального уравнения на решение задачи Коши (3.7), (3.8) запишем в виде

. (3.16)

Решая (3.16), мы находим представление в терминах и . Подставляя (3.16) в условия (3.9) и (3.10) получим систему уравнений для нахождения неизвестных параметров:

(3.17)

(3.18)

Обозначив через матрицу, соответствующей левой части системы (3.17), (3.18) и запишем систему в виде

(3.19)

где

Нетрудно установить, что разрешимость краевой задачи (3.5), (3.6) эквивалентна разрешимости системы (3.19).

Далее мы рассматриваем задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений на подинтервалах

(3.20)

где - ( матрица, или вектор, оба непрерывны на . Следовательно, решением задачи (3.20) является квадратная матрица или вектор размерности . Обозначим через решение задачи Коши (3.20). Очевидно,

где - фундаментальная матрица дифференциального уравнения (3.20) на r-м интервале.

Предлагаемый численный метод основан на построении и решении системы (3.19). Как видно из уравнений (3.17), (3.18), коэффициенты и правая часть системы (3.19) находятся как решение матричных и векторных задач Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений

(3.21)

(3.22)

(3.23)

Рассмотрим . Разделим каждый r-й интервал на частей с шагом . Предположим, что на каждом интервале переменная принимает свои дискретные значения: , и обозначим через множество таких точек. Приближенные значения коэффициентов и правой части системы (3.19) найдем решая матричные и векторные задачи Коши (3.21) – (3.23) методом Рунге-Кутта 4-го порядка точности с шагом на каждом r -ом интервале. И находим значения (-матриц и n-вектора на .

Тогда получим следующую приближенную систему алгебраических уравнений относительно параметров :

(3.24)

Решая систему (3.24) найдем . Как было отмечено выше компоненты =() являются значениями приближенного решения задачи (3.5), (3.6) в начальных точках подинтервалов: . Приближенные значения решения в остальных точках подинтервалов определяются решениями задач Коши

(3.25)

. (3.26)

Для решения задач Коши (3.25), (3.26) на основе метода Рунге-Кутта 4-го порядка точности находим численное решение линейной многоточечной краевой задачи для системы нагруженных дифференциальных уравнений (3.5), (3.6). Мы видим, что решение краевой задачи (3.5), (3.6) также является решением краевой задачи (3.1), (3.2), когда матрица обратима.

**ЗАКЛЮЧЕНИЕ**

Данный отчет содержит исследования по теме "Методы решения многоточечных краевых задач для систем нагруженных дифференциальных уравнений", выполненных в 2020-2021 годы в области краевых задач для систем существенно нагруженных обыкновенных дифференциальных уравнений.

Построен алгоритм нахождения решения линейной двухточечной краевой задачи для существенно нагруженных обыкновенных дифференциальных уравнений.

Построен алгоритм нахождения решения линейной многоточечной краевой задачи для существенно нагруженных обыкновенных дифференциальных уравнений и установлены условия его сходимости.

Установлена однозначная разрешимость линейных многоточечных краевых задач для существенно нагруженных обыкновенных дифференциальных уравнений.

Разработаны численные методы решения линейных многоточечных краевых задач для существенно нагруженных обыкновенных дифференциальных уравнений.

Проделанная за отчетный период научно - исследовательская работа по теме касается актуальных проблем современной теории краевых задач для нагруженных дифференциальных уравнений, диктуемых реальными физическими процессами и носит в основном теоретический характер. Результаты, полученные исполнителями проекта, являются новыми и достаточно в полной мере отражают содержание поставленных задач.

Высокий уровень выполненных научно-исследовательских работ характеризуется участием исполнителей проекта в многочисленных публикациях в авторитетных математических журналах, которое отражено в Списке использованных источников и Приложении А - в списке опубликованных работ настоящего отчёта. Календарный план научно-исследовательских работ приведен в Приложении Б.

**СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ**

1 Нахушев A.M. Нагруженные уравнения и их применение. - M.: Наука, 2012. - 232 с.

2 Нахушев A.M. Уравнения математической биологии. - M.: Высшая школа, 1995. -205 с.

3 Нахушев A.M. Об одном приближенном методе решения краевых задач для дифференциальных уравнений и его приложения к динамике почвенной влаги грунтовых вод // Дифференциальные уравнения. - 1982. - T. 18, No. 1. - С. 72-81.

4 Нахушев A.M. Задачи со смещением для уравнений в частных производных. - М.: Наука, 2006. - 287 с.

5 Krall A.M. The development of general differential and general differential-boundary systems // Rocky Mountain Journal of Mathematics. - 1975. - Vol. 5. - P. 493-542.

6 Krall A.M. Differential-boundary operators // Trans. Amer. Math. Soc. - 1971. - Vol. 154. - P. 429-458.

7 Iskenderov A.D. The first boundary value problem for a charged system of quasi-linear parabolic equations // Differ. Uravn. - 1971. -Vol. 7, No. 10. - P. 1911-1913.

8 Дженалиев M.T., Рамазанов M.И. [Нагруженные уравнения как возмущения дифференциальных уравнений](javascript:void(0)). - Алматы: Гылым, 2010. - 336 с.

9 Dzhenaliev M.T. Loaded equations with periodic boundary conditions //  Differential equations. - 2001. - Vol. 37, No. 1. - P. 51–57.

10 Abdullaev V.M., Aida-zade K.R. Numerical method of solution to loaded nonlocal boundary value problems for ordinary differential equations // [Computational Mathematics and Mathematical Physics. - 2014. - Vol. 54, No. 7. - P. 1096-1109](https://doi.org/10.1134%2FS0965542514070021).

11 Aida-zade K.R., Abdullayev V.M. Solution to a class of inverse problems for a system of loaded ordinary differential equations with integral conditions // [Journal of Inverse and Ill-Posed Problems. - 2016. - Vol.](https://www.scimagojr.com/journalsearch.php?q=23919&tip=sid&clean=0) 24, No. 5. - P. 543-558.

12 Aida-zade K.R., Abdullaev V.M. On the numerical solution to loaded systems of ordinary differential equations with non-separated multipoint and integral conditions // Numerical Analysis and Applications. -2014. -Vol. 7, No. 1. - P. 1-14.

13 Aida-zade K.R., Abdullaev V.M. On a numerical solution of loaded differential equations // Journal of computational mathematics and mathematical physics. -2004. -Vol. 44, No. 9. -P. 1585-1595.

14 Parasidis I.N. Extension method for a class of loaded diﬀerential equations with nonlocal integral boundary conditions // Bulletin of the Karaganda university-mathematics. - 2019. - Vol. 96, No. 4. - P. 58-68.

15 Parasidis I.N., Providas E., Dafopoulos V. Loaded differential and fredholm integro-differential equations with nonlocal integral boundary conditions // Applied Mathematics and Control Sciences. - 2018. - No. 3. - P. 50-68.

16 Ozturk I. On the nonlocal boundary value problem for one order loaded differential equation // Indian J. pure appl. Math. - 1995. - Vol. 26, No. 4. - P. 309-314.

17 Alikhanov A.A., Berezkov A.M., Shkhanukhov-Lafishev M.Kh. Boundary value problems for certain classes of loaded differential equations and solving them by finite difference methods. // Computational Mathematics and Mathematical Physics. -2005. -Vol. 48. -P. 1581-1590.

18 Бакирова Э.A. О признаке однозначной разрешимости двухточечной краевой задачи для системы нагруженных дифференциальных уравнений // Известия НАН РК. -2005. - №1. - С. 95-102.

19 Dzhumabaev D.S. Computational methods of solving the boundary value problems for the loaded differential and Fredholm integro-differential equations // Mathematical Methods in the Applied Sciences. - 2018. - Vol. 41, No. 4. - P. 1439-1462.

20 Dzhumabaev D.S. Well-posedness of nonlocal boundary value problem for a system of loaded hyperbolic equations and an algorithm for finding its solution // Journal of Mathematical Analysis and Applications. - 2018. - Vol. 461, No. 1. - P. 817-836.

21 Dzhumabaev D.S. New general solutions to linear Fredholm integro-differential equations and their applications on solving the boundary value problems, Journal of Computational and Applied Mathematics. - 2018. - Vol. 327, No. 1. - P. 79-108.

22 Бакирова Э.A., Кадирбаева Ж.M. О разрешимости линейной многоточечной краевой задачи для нагруженных дифференциальных уравнений // Известия НАН РК. Серия физико-математическая. - 2016. - Т. 5, № 309. - С. 168-175.

23 Асанова А.Т., Кадирбаева Ж.M. О численном решении двухточечной краевой задачи для импульсных систем нагруженных дифференциальных уравнений // Математический жуpнал. - 2016. - T. 16, №1(59). - C. 101-117.

24 Assanova A.T., Bakirova E.A., Kadirbayeva Zh.M. Numerical implementation of solving a boundary value problem for a system of loaded differential equations with parameter // News of the NAS RK. Series Phys.-Math. - 2019. - Vol. 3, No. 325. - P. 77-84.

25 Assanova A.T., Kadirbayeva Zh.M. On the numerical algorithms of parametrization method for solving a two-point boundary-value problem for impulsive systems of loaded differential equations // Computational and Applied Mathematics. - 2018. - Vol. 37, No. 4. - P. 4966-4976.

26 Assanova A. T., Imanchiyev A. E., Kadirbayeva Zh.M. Numerical Solution of Systems of Loaded Ordinary Differential Equations with Multipoint Conditions // Computational Mathematics and Mathematical Physics. - 2018. - Vol. 58, No. 4. - P. 508-516.

27 Dzhumabayev D.S. Criteria for the unique solvability of a linear boundary-value problem for an ordinary differential equation // U.S.S.R. Comput. Maths. Math. Phys. -1989. -Vol. 29, No. 1. - P. 34-46.

**Приложение А**

**Список опубликованных работ**

Список публикаций за 2020 г.

В отечественных изданиях, входящих в базу данных Web of Science

1 Kadirbayeva Zh.M., Dzhumabaev A.D. Numerical implementation of solving a control problem for loaded diﬀerential equations with multi-point condition // Bulletin of the Karaganda university. Mathematics series. 2020. – № 4(100). –P. 81-91. [https://doi.org/10.31489/2020M4/ 81-91](https://doi.org/10.31489/2020M4/%2081-91)

В журналах, входящих в список рекомендуемых изданий Комитета

по обеспечению качества в сфере образования и науки МОН РК

1 Kadirbayeva Zh.M., Karakenova S.G. Numerical solution of the multipoint boundary value problems for essentially loaded ordinary differential equations // Kazakh Mathematical Journal. – 2020. – Vol. 20, No. 4. – P.47-57.

2 Bakirova E.A., Minglibayeva B.B., Kasymova A.B. An algorithm for solving multipoint boundary value problem for the loaded differential and Fredholm integro-differential equations // Kazakh Mathematical Journal. – 2020. – Vol. 20, No. 4. – P.107-118.

Список публикаций за 2021 г.

В изданиях, входящих в базу данных Web of Science и Scopus

1 Kadirbayeva Zh.M. A numerical method for solving boundary value problem for essentially loaded diﬀerential equations // Lobachevskii Journal of Mathematics, 2021, Vol. 42, No. 3, pp. 551–559. (Scopus SJR=0.422, Процентиль 50 в категории Mathematics, General Mathematics). <https://doi.org/10.1134/S1995080221030112>

В отечественных изданиях, входящих в базу данных Web of Science

1 Kadirbayeva Zh.M., Bakirova E.A., Dauletbayeva A.Sh., Kassymgali A.A. An algorithm for solving a boundary value problem for essentially loaded differential equations // News of the NAS RK. Phys.-Math. Series. 2021. Volume 2, Number 336. -P.6-14. <https://doi.org/10.32014/2021.2518-1726.15>

Тезисы докладов и материалы научных конференций

1 Kadirbayeva Zh.M. A problem for essentially loaded differential equations // Annual International April Mathematical Conference-2021. (5-8 April): - Almaty, 2021 -P. 86-87.

2 Kadirbayeva Zh.M. A numerical algorithm for solving problem for a system of essentially loaded differential equations // 8th European Congress of Mathematics. (20 - 26 June): -Portorož, Slovenia, 2021. –P. 650-651.

**ПРИЛОЖЕНИЕ Б**

Приложения 1.13

к Договору № от\_\_\_\_\_2018 г. на грантовое финансирование

**ТЕХНИЧЕСКАЯ СПЕЦИФИКАЦИЯ И КАЛЕНДАРНЫЙ ПЛАН РАБОТ**

По договору № / / / от *J>\_* \_\_\_ 2018 года

***1.* РГ П на праве хозяйственного ведения «И нститут**

***признакам и экономические показатели***

**2.1** Направление работы: теория начально-краевых задач для дифференциальных уравнений в частных производных высокого порядка.

**2.2** Область применения: математическое моделирование, численный анализ, прикладная математика, информационные технологии.

**2.3** Конечный результат:

- за 2018 год: Будут построены алгоритмы нахождения решений начально-краевых задач для дифференциальных уравнений в частных производных третьего порядка и установлены условия их однозначной разрешимости в терминах исходных данных. Будут построены алгоритмы нахождения решений семейства многоточечных краевых задач для дифференциального уравнения третьего порядка и установлены условия их однозначной разрешимости в терминах исходных данных. Будут построены алгоритмы нахождения решений краевых задач с данными на характеристиках для дифференциальных уравнений в частных производных гиперболического типа с нагружениями, с запаздывающим аргументом и установлены условия их однозначной разрешимости в терминах исходных данных. Будут построены алгоритмы нахождения решений нелокальной задачи с интегральными условиями, с импульсными воздействиями для дифференциальных уравнений в частных производных третьего порядка и установлены условия их однозначной разрешимости в терминах исходных данных;

- за 2019 год: Будут построены алгоритмы нахождения решений начально-краевых задач для дифференциальных уравнений в частных производных четвертого порядка и установлены условия их однозначной разрешимости в терминах исходных данных. Будут построены алгоритмы нахождения решений семейства многоточечных краевых задач для дифференциального уравнения четвертого порядка и уст;

**Календарный план работ**





