****

**РЕФЕРАТ**

Отчет 39 с., 1 кн., 19 источн., 2 прил.

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ОПЕРАТОРЫ, ЯДРО ИНТЕГРАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА, ТЕОРЕМА МАРЦИНКЕВИЧА-КАЛЬДЕРОНА, ПРОСТРАНСТВА ЛЕБЕГА, ПРОСТРАНСТВА ЛОРЕНЦА, ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ФУРЬЕ

Обьектом исследования является интегральные оператор в пространствах Лебега.

Цель работы – для интегральных операторов получить усиления интерполяционной теоремы Марцинкевича-Кальдерона. Используя интерполяционные методы получить неравенства типа Харди-Литтлвуда и неравенства Нурсултанова весовых пространствах Лоренца.

Для достижения поставленной цели предполагается решение следующих задач:

1. В терминах ядра интегрального оператора получить необходимые условия для того, чтобы оператор был ограничен в пространстве Лебега Lp для всех ;
2. В терминах ядра интегрального оператора получить достаточные условия для того чтобы оператор был ограничен в пространстве Лебега Lp для всех ;
3. Получение новых неравенств типа Харди-Литтлвуда для двумерных обобщенных пространств Лоренца.
4. Получение новых неравенств типа Нурсултанова для двумерных обобщенных пространств Лоренца.

Методы исследования базируются на разработках теории интерполяции, теории функциональных пространств, теории интегральных операторов.

Полученные результаты:

1. В терминах ядра интегрального оператора получены необходимые условия для того, чтобы оператор был ограничен в пространстве Лебега Lp для всех .

2. В терминах ядра интегрального оператора получены достаточные условия для того чтобы оператор был ограничен в пространстве Лебега Lp для всех ;

3. Получены новые неравенства типа Харди-Литтлвуда для двумерных обобщенных пространств Лоренца.

4. Получены новые неравенства типа Нурсултанова для двумерных обобщенных пространств Лоренца.

Подготовлены 3 статьи: 2 статьи приняты в печать (Eurasian Mathematical Journal и Математические заметки), 1 статья сдана в редакцию (журнал Eurasian Mathematical Journal).

**РЕФЕРАТ**

Есеп 39 б., 1 кітап, 19 әдебиет көздері, 2 қосымша.

ИНТЕГРАЛДЫ ОПЕРАТОРЛАР, ИНТЕГРАЛДЫ ОПЕРАТОРЛАР ЯДРОСЫ, МАРЦИНКЕВИЧ-КАЛЬДЕРОН ТЕОРЕМАСЫ, ЛЕБЕГ КЕҢІСТІКТЕРІ, ЛОРЕНЦ КЕҢІСТІКТЕРІ, ФУРЬЕ ТҮРЛЕНДІРУІ

Зерттеу объектісі Лебег кеңістігіндегі интегралды операторлар болып табылады.

Жұмыстың мақсаты – интегралдық операторлар үшін Марцинкевич-Кальдерон интерполяциялық теоремасының күшейтілуін алу. Интерполяциялық әдістердің қолдана отырып, салмақты Лоренц кеңістіктерінде Харди-Литтлвуд типті теңсіздіктерді және Нурсултанов теңсіздіктерін алу.

Алға қойған мақсатқа жету үшін келесі есептерді шешу ұйғарылады:

1. Интегралдық операторлардың ядросы терминінде барлық  үшін Lp

Лебег кеңістігінде оператордың шенелуінің қажетті шарттарын алу;

1. Интегралдық операторлардың ядросы терминінде барлық  үшін Lp Лебег кеңістігінде оператордың шенелуінің жеткілікті шарттарын алу;
2. Екі өлшемді жалпыланған Лоренц кеңістіктердегі жаңа Харди-Литтлвуд типті теңсіздіктерді алу;
3. Екі өлшемді жалпыланған Лоренц кеңістіктердегі жаңа Нұрсұлтанов типті теңсіздіктерді алу.

Зерттеу әдістері интерполяция теориясының, функционалды кеңістіктер теориясының интегралды операторлар теориясының әдістеріне негізделеді.

Алынған нәтижелер:

1. Интегралдық операторлардың ядросы терминінде барлық  үшін Lp

Лебег кеңістігінде оператордың шенелуінің қажетті шарттарын алу;

2. Интегралдық операторлардың ядросы терминінде барлық  үшін Lp Лебег кеңістігінде оператордың шенелуінің жеткілікті шарттарын алу;

1. Екі өлшемді жалпыланған Лоренц кеңістіктердегі жаңа Харди-Литтлвуд типті теңсіздіктерді алу;
2. Екі өлшемді жалпыланған Лоренц кеңістіктердегі жаңа Нұрсұлтанов типті теңсіздіктерді алу.

3 мақала дайындалды: 2 мақала баспаға қабылданды (Eurasian Mathematical Journal және Математические заметки), 1 мақала редакцияға тапсырылды (Eurasian Mathematical Journal журналы).

**СОДЕРЖАНИЕ**

|  |  |
| --- | --- |
| ВВЕДЕНИЕ......................................................................................................................... | 6 |
| ОСНОВНАЯ ЧАСТЬ ОТЧЕТА О НИР............................................................................ | 9 |
| 1 Необходимые условия для ограниченности интегрального оператора в Lp….…… | 9 |
| 1.1 Основные леммы............................................................................................. | 9 |
| 1.2 Необходимые условия для ограниченности интегрального оператора в Lp | 14 |
| 2 Достаточные условия для ограниченности интегрального оператора в Lp……….. | 18 |
| 3 Неравенства типа Харди-Литтлвуда для двумерных обобщенных пространств  Лоренца........................................................................................................................... | 22 |
| 4 Неравенства типа Нурсултанова для двумерных обобщенных пространств Лоренца. | 31 |
| ЗАКЛЮЧЕНИЕ.............................................................................................................. | 33 |
| СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ......................................................... | 34 |
| ПРИЛОЖЕНИЕ А – Список публикаций……………………………………………… | 36 |
| ПРИЛОЖЕНИЕ Б – Календарный план работ………………………………………… | 37 |

**ВВЕДЕНИЕ**

Метод вещественной интерполяции является важным и мощным методом в теории операторов и нашел глубокие и важные применения в теории функциональных пространств, уравнениях частных производных, теории рядов Фурье, теории приближений, в вычислительной математике. В основе этого метода лежит интерполяционная теорема Марцинкевича.

В отчете рассматривается вопрос об ограниченности для важного класса линейных операторов – интегральных операторов.

Исследуется вопрос о необходимых и достаточных условиях огранниченности интегрального оператора в пространствах Лебега Lp для всех .

В терминах ядра интегрального оператора получены необходимые и достаточные условия для того, чтобы оператор был ограничен в пространстве Лебега Lp для всех . Используя интерполяционные методы получены новые неравенства типа Харди-Литтлвуда для двумерных обобщенных пространств Лоренца. Получены новые неравенства типа Нурсултанова для двумерных обобщенных пространств Лоренца.

Пусть  измеримое пространство. Пусть мера  обладает свойством непрерывности т.е. для произвольного измеримого множества  и  найдется  что .

Пространство  есть классическое пространство Лебега с



Функция распределения для – измеримой на  определяется следующим образом



Тогда функция  называется невозрастающей перестановкой функции .

Пусть  и  Пространства Лоренца  (см. [1]) определяется как, множество измеримых функций  такие, что

если  то

 (1)

если  то



Хорошо известна интерполяционная теорема Марцинкевича-Калдерона [1, 2].

Теорема. Пусть    Если  – квазилинейный оператор и константы ,  такие, что имеют место

**** (2)

**** (3)

Тогда верно

**** (4)

где  

Рассматривается интегральный оператор вида

 (5)

Для интегрального оператора (5) из [3]–[5] следует, что при 



Таким образом, для интегральных операторов условия (2) и (3) в теореме 1 можно заменить на

 (6)

 (7)

Отметим, что условия (2), (3) и соответственно (6), (7) не являются необходимыми для выполнения неравенств (4) при всех 

В данном отчете мы рассматриваем задачу получения необходимых условий в терминах ядра оператора (5) для выполнения неравенства (4) при всех  Изучаемые нами операторы играют очень важную роль в гармоническом анализе.

В отличии от классической задачи экстраполяции ([3], [4], [5], [6], [7]), здесь рассматривается более узкий класс операторов – интегральные операторы и условия ищутся в терминах ядра интегрального оператора, а не в терминах самих операторов. То есть это в некотором смысле обратная задача к интерполяционной теореме Марцинкевича-Кальдерона для интегральных операторов с условиями (6), (7).

За 2020 год по теме был подготовлен промежуточный отчет о НИР «Интерполяционные теоремы типа Марцинкевича-Кальдерона и их приложения», инвентарный номер отчета за 2020 год: 0220РК01665.

**ОСНОВНАЯ ЧАСТЬ ОТЧЕТА О НИР**

**1  Необходимые условия для ограниченности интегрального оператора в Lp**

* 1. **Основные леммы**

В данном подразделе описаны пространства Лебега и Лоренца, также приведены вспомогательные леммы для доказателсьвта основных утверждений.

Пусть  измеримое пространство. Пусть мера  обладает свойством непрерывности, т.е. для произвольного измеримого множества  и  найдется  что .

Пространство  есть классическое пространство Лебега с



Функция распределения для -измеримой на  определяется следующим образом



Тогда функция  называется невозрастающей перестановкой функции .

Пусть  и  Пространства Лоренца  (см. [1]) определяется как, множество измеримых функций  такие, что

если  то



если  то



Определим



Будем использовать для  представление



Лемма 1.1.1.Пусть  локально интегрируемая функция. Тогда для любого множества положительной меры , существует множество  такое, что 



Доказательство леммы 1.1.1. Для любого  такое, что , определим следующие множества



Тогда

.

Согласно определению получим

.

Рассмотрим два случая:  и . В первом случае, из свойства непрерывности меры существует  такое, что  и

.

Во втором случае,  существуют  такие, что  . Символ  является константой по , и имеем



.

Пусть  множество реализующий минимум. Так как , применяя непрерывность меры, существует  такое, что . Пусть , тогда





.

Таким образом, имеем

.

Лемма 1.1.2.Пусть  и функция  такая, что



есть измеримая локально интегрируемая функция. Тогда имеет место оценка



где



Доказательство леммы 1.1.2. Из леммы 1.1.1 следует, что



,

где  – невозрастающая перестановка функции . Применяем лемму 1.1.1 и получим

.

Таким образом, получим

.

Лемма 1.1.3. ([5])Пусть ** и  Тогда имеем



**1.2 Необходимые условия для ограниченности интегрального оператора в Lp**

В данном подразделе исследуется задача получения необходимых условий в терминах ядра оператора для того, чтобы оператор был ограничен в пространстве Лебега Lp для всех .

Для интегрального оператора вида



из [8]–[10] следует, что при 



Справедлива следующая теорема.

Теорема 1.2.1.Пусть  Если для интегрального оператора



и для всякого  имеет место соотношение



тогда





Доказательство опирается на леммы приведенные в первом разделе.

Доказательство теоремы 1.2.1. Из вложения  и Леммы 1.1.3 для любого  имеем

.

Из условия теоремы получим



для любого .

Пусть  любые измеримые множества положительной меры

. (8)

Взяв  выбираем  Если



тогда параметра  выбираем следующим образом:



если



тогда



Таким образом, получим 

Следовательно, первой случай из (8) имеем



или





Второй случай





Пусть теперь  тогда выбирая , имеем





Второе соотношение доказывается аналогично.

1. **Достаточные условия для ограниченности интегрального оператора в Lp**

В данном подразделе исследуется задача получения достаточных условий в терминах ядра оператора для того, чтобы оператор был ограничен в пространстве Лебега Lp для всех .

Теорема 2.1.1. Пусть



Если



тогда для любого 



Будем говорить, что мера  является непрерывной, если для всякого -измеримого множества , найдется измеримое подмножество  такое, что .

В дальнейшем будем считать, что меры  и  являются непрерывными.

Теорема 2.1.2. Пусть   , 

, , .

Если для ядра  оператора



имеет место





то оператор  ограничен из  в  и имеет место неравенство

, ,

где 

Доказательство теоремы 2.1.1. Пусть условия теоремы выполнены и пусть . Тогда имеем оценку







Применяя лемму 1.1.2, получим следующую оценку





где

.

Функцию  оценим следующим образом для 





и когда 



Следовательно, имеем





Каждый функционал  оценим. Сначало заметим, что

.

Следовательно,



.

Здесь будем считать, что . Применяя неравенство Харди, кроме того, во втором интеграле таже дважды применяя неравенство Харди, получим

.

Также, применяя неравенствоХарди дважды, получим

.

Таким образом, имеем

.

Замечание 2.1.1 В работах [11], [12], [13] рассматриваются анизотропные пространства и исследуются их интерполяционные свойства по интерполяционному методы Фернандеса [14], [15], [11], [16]. Получены теоремы типа Марцинкевича-Калдерона. Эти методы в упомянутых статьях могут применяться для получения аналогичных результатов в анизотропных пространствах.

**3  Неравенства типа Харди-Литтлвуда для двумерных обобщенных пространств Лоренца**

В данном разделе рассматриваются двумерные обощенные пространства Лоренца. Получены новые неравенства типа Харди-Литтлвуда для двумерных обобщенных пространств Лоренца.

Пусть  Двумерные обощенные пространства Лоренца определяется следующим образом:



где  – невозрастающая перестановка функции .

Если , то



Если , то

.

Пусть .

.

Если , то

.

Если , то

.

Пусть  и  – неотрицательная функция на . Определим классы функции ,  и  определим следующим образом:

 возрастающая функция,

убывающая функция}.

 возрастающая функция,

убывающая функция}.

 возрастающая функция,

убывающая функция}.

Тогда классы , B и C определяются следующим образом:

,  и .

Лемма 3.1.1. Пусть  и . Тогда верно неравенства

. (9)

Доказательство леммы 3.1.1 неравенства (9). Рассмотрим





Применяя неравенства Гельдера и учитывая, что  получим











Учитывая, что  – возрастающая функция, получим следующую оценку



Учитывая, что  получим следующую оценку





Лемма 3.1.2. Пусть  и . Тогда верно неравенства

. (10)

Доказательство леммы 3.1.2 неравенства (10). Рассмотрим





Применяя неравенства Гельдера, получим











Учитывая, что  – убывающая функция, получим следующую оценку







Пусть  и  Рассмотрим преобразования Харди и Беллмана

,



Лемма 3.1.3. Пусть 



Если , то для любого  найдется такое представление функции



что



где  – композиция операций:

– при  – преобразование типа Харди;

– при  – преобразование типа Беллмана.

Доказательство леммы 3.1.2. Пусть  Рассмотрим



Пусть  – характеристическая функция множества



где  – измеримое подмножество 



Такое множество всегда можно подобрать, так как при фиксированном 



Через  и  обозначим функции

,

.

Каждую функцию  и  представим в виде , .

Пусть

,

где

.

,

где



Тогда





Таким образом, построено представление



такое, что



Пусть

 – преобразование Фурье функции .

Теорема 3.1.1. Пусть  и   Тогда





Доказательство теоремы 3.1.1. Рассмотрим







Применяя лемму 3.1.1, получим





Применяя лемму 3.1.3, получим

****

где









Применяя лемму 3.1.2, получим искомую оценку.

**4  Неравенства типа Харди-Литтлвуда для двумерных обобщенных пространств Лоренца**

В данном разделе получены новые неравенства типа Нурсултанова для двумерных обобщенных пространств Лоренца.

Пусть



преобразование Фурье функции 

Хорошо известны неравенства, связывающие интегральные свойства функций и ее преобразования Фурье.

Пусть   и  тогда имеют место неравенства





где  – классическое пространство Лоренца. Эти неравенства называют неравенствами Хаусдорфа-Юнга и Харди-Литтлвуда-Стейна, соответственно [17]. Имеются аналогичные неравенства для преобразования Фурье на торе  т.е. для , где  – преобразования Фурье по некоторой ортонормированной системе.

Неравенства типа Хаусдорфа-Юнга (Харди-Литтлвуда)-Стейна для преобразования Фурье по регулярной системе были получены Е.Д. Нурсултановым в работах [10], [18]:



Эти утверждения являются более общими чем рассматриваемые выше утверждения так как регулярная система является более общей чем все тригонометрические системы, система Уолша и система Прайса с ограниченной образующей.

В работе [19] получены верхние и нижние оценки нормы преобразования Фурье в обобщенных пространствах Лоренца 

Теорема [19]. Пусть  и  принадлежит классу  Тогда



где  и  

Неравенствам для преобразования Фурье функций из обобщенного пространства Лоренца  Верна теорема дающая верхнюю и нижнюю оценки нормы преобразования Фурье функции из в обобщенных пространств Лоренца 

Если  то



Отметим, что это неравенство для преобразования Фурье также следует из результатов работы [10], [18], где используются методы сетевых пространств.

Целью данного подраздела явялется получение аналога неравенство Нурсултанова для двумерного обобщенного пространства Лоренца.

Верна следующая теорема.

Теорема 4.1.1. Пусть  и   Тогда





где .

**ЗАКЛЮЧЕНИЕ**

Изучены необходимые и достаточные условия для огранниченности интегрального оператора в пространствах Лебега Lp для всех , новые неравенства типа Харди-Литтлвуда для двумерных обобщенных пространств Лоренца, новые неравенства типа Нурсултанова для двумерных обобщенных пространств Лоренца.

В ходе реализации проекта получен следующие результаты:

1. В терминах ядра интегрального оператора получены необходимые условия для того, чтобы оператор был ограничен в пространстве Лебега Lp для всех .
2. В терминах ядра интегрального оператора получены достаточные условия для того чтобы оператор был ограничен в пространстве Лебега Lp для всех ;
3. Получены новые неравенства типа Харди-Литтлвуда для двумерных обобщенных пространств Лоренца.
4. Получены новые неравенства типа Нурсултанова для двумерных обобщенных пространств Лоренца.

Результаты работы носят теоретический характер и могут найти применение в гармоническом анализе, теории функциональных пространств и уравнениях математической физики, а так же могут быть использованы в научных центрах: КазНУ имени Аль-Фараби, Институте математики и математического моделирования, МГУ имени М.В. Ломоносова, ЕНУ имени Л.Н. Гумилева, КарГУ имени Е.А. Букетова, Математическом институте имени В.А.Стеклова РАН и других.

Исполнителями сданы в печать всего 3 статьей, из них 2 статьи в Eurasian Mathematical Journal и 1 статья в Математические заметки.

Результаты аппробированы на научном семинарах Казахстанского филиала МГУ и Института математики и математического моделирования.

**СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ**

1 Берг Й., Лефстрем Й. Интерполяционные пространства. Введение. – М.: Мир, 1980.

2 Calderon A.P. Spaces between  and  and the theorem of Marcinkiewicz // Studia Math. – 1966. – Vol. 26. – P. 273–299.

3 Yano S. An extrapolation theorem // J. Math. Soc. Japan. – 1951. – Vol. 3. – P. 296–305.

4 Milman M. Extrapolation and optimal decompositions with applications to analysis. – Berlin: Springer-Verl., 1994. (Lecture Notes in Math.; 1580).

5 Astashkin S.V. Extrapolation properties of the scale of Lp-spaces // Sb. Math. – 2003. – Vol. 194, № 6. – P. 813–832.

6 Carro M.J. New extrapolation estimates // J.Funct. Annal. – 2000. – Vol. 174. – P. 155–166.

7 Berezhnoi E. I. Can Yano's extrapolation theorem be strengthened? // Funct. Anal. Appl. – 2015. – Vol. 49, № 2. – P. 145–147.

8 Kostyuchenko A.G., Nursultanov E.D. Theory of control of “catastrophes” // Russian Math. Surveys. – 1998. – Vol. 53, № 3. – P. 628–629.

9 Костюченко А.Г., Нурсултанов Е.Д. Об интегральных операторах в -пространствах // Фундамент. и прикл. матем. – 1999. – Vol. 5, № 2. – P. 475–491.

10 Nursultanov E., Tikhonov S. Net spaces and boundedness of integral operators // J. Geom. Anal. – 2011. – Vol. 21. – P. 950–981.

11 Нурсултанов Е.Д. О коэффициентах кратных рядов Фурье из -пространств // Известия РАН. – 2000. – Т. 64, № 1. ‑ С. 95‑122.

12 Нурсултанов Е.Д. Интерполяционные теоремы для анизотропных функциональных пространств и их приложения // Доклады академии наук. ­­­­­­­­­­ – 2004. – Т. 394, № 1. – С. 1–4.

13 Bekmaganbetov K.A., Nursultanov E.D. On interpolation and embedding theorems for the spaces  // Math. Notes. – 2008. – Vol. 84, № 5. – P. 733–736.

14 Fernandez D.L. Interpolation of 2n Banach spaces and the Calderon spaces // Proc. London Math. Soc. – 1988. – Vol. 56. – P. 143–162.

15 Fernandez D.L. Interpolation of 2n Banach spaces // Studia Math. – 1979. – Vol. 65, № 2. – P. 175–201.

16 Nursultanov E.D. Application of interpolational methods to the study of properties of functions of several variables // Math. Notes. – 2004. – Vol. 75, № 3. – P. 341–351.

17 Stein E.M. Interpolation of linear // Trans. Amer. Math. Soc. – 1956. – Vol. 83. –P. 482–492.

18 Нурсултанов Е. Д., Сетевые пространства и преобразования Фурье // Докл. Акад. наук. – 1998. – Т. 361, № 5. – С. 597–599.

19 Копежанова А.Н., Нурсултанов Е.Д., Перссон Л.-Е. О неравенствах для преобразования Фурье функций из пространств Лоренца // Математические заметки. –2011. – T. 90, выпуск 5. – С. 784–787.

**ПРИЛОЖЕНИЕ А**

**Список публикаций**

1. Nursultanov E.D., Tleukhanova N.T. Interpolation and exstrapolation properties of integral operators // сдана в редакцию журнала Eurasian Mathematical Journal. (Web of Science; Scopus SJR=0.277, Процентиль 25 в категории General Mathematics).
2. Bashirova A.N., Nursultanov E.D. On the inequality of different metrics for multiple Fourier-Haar series // принята в печать в Eurasian Mathematical Journal. – 2021. – Vol. 12, № 3. – P. 90-93. (Web of Science; Scopus SJR=0.277, Процентиль 25 в категории General Mathematics).
3. Нурсултанов Е.Д., Тлеуханова Н.Т., Мукеева Ж.М. Об интерполяционной теореме Марцинкевича-Кальдерона для интегральных операторов // принята в печать Математические заметки. (Web of Science IF=0.673, Квратиль Q4 в категории Mathematics; Scopus SJR=0.723, Процентиль 49 в категории General Mathematics).

**ПРИЛОЖЕНИЕ Б**

**Календарный план работ**

****

****

****