Министерство образования и науки Республики Казахстан

Комитет науки

РЕСПУБЛИКАНСКОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ ПРЕДПРИЯТИЕ

НА ПРАВЕ ХОЗЯЙСТВЕННОГО ВЕДЕНИЯ

«ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ»

(РГП «ИМММ»)

МРНТИ 27.31.15; 27.31.44

УДК 517.956.32

№ госрегистрации 0121РК00506

Инв.№



Алматы 2021



|  |  |
| --- | --- |
|  |  |
|  |  |  |  |
|  |  | | |
|  |  | | |
|  |

**РЕФЕРАТ**

Есеп беру жұмысы32 б., 34 әдебиет көздері, 2 қосымшалар.

ГРИН ФУНКЦИЯСЫ, РИМАН-ГРИН ФУНКЦИЯСЫ, СИПАТТАМАЛЫҚ ҮШБҰРЫШ, ЛОКАЛЬДЫ ЕМЕС ШЕКАРАЛЫҚ ЕСЕП, ТОЛҚЫН ТЕҢДЕУІ, ЕКІ ӨЛШЕМДІ ГИПЕРБОЛАЛЫҚ ТЕҢДЕУ

Жобаның мақсаты сипаттамалық үшбұрыштағы гиперболалық теңдеу үшін асиметриялы сипаттамалық бастапқы шекаралық есептерінің Грин функциясын құру әдісін негіздеу.

Есептің негізгі ғылыми нәтижелері күнтізбелік кестеге сәйкес алынған:

* ширек жазықтықтағы жалпы түрдегі екінші ретті екі өлшемді ги-перболалық теңдеу үшін бірінші бастапқы шекаралық есептің Грин функциясы құрылды;
* ширек жазықтықтағы жалпы түрдегі екінші ретті екі өлшемді ги-перболалық теңдеу үшін екінші бастапқы шекаралық есептің Грин функциясы құрылды;
* сипаттамалық емес шекарада бірінші текті шекаралы шартты сипаттамалық үшбұрышта қарастырылатын жалпы түрдегі гиперболалық теңдеу үшін асиметриялы сипаттамалық шекаралық есептердің Грин функциясы құрылды;
* сипаттамалық емес шекарада екінші текті шекаралық шартты сипаттамалық үшбұрышта қарастырылатын жалпы түрдегі гиперболалық теңдеу үшін асимметриялы сипаттамалық шекаралық есептердің Грин функциясы құрылды;
* грин функциясының «классикалық емес» түріндегі дұрыс сипаттамалық шекаралы есеп мысалы құрастырылды.

Жобада қойылған мәселелердің орындалу деңгейі. Жобаның күнтізбелік жоспарында қарастырылған мәселелердің барлығы орындалды, алға қойылған мақсаттарға қол жеткізілді. Жобаның негізгі нәтижелерін алу барысында туындаған қосымша ғылыми нәтижелер алынған және жарияланған (Web of Science және / немесе Scopus деректер базасына енген халықаралық ғылыми журналдарда) жобаның нәтижелерінің жоспарланған кестесіне қосымша.

Ғылыми жариялымдар. Зерттеу нәтижелері бойынша 2021 жылдың мамыр айынан бастап жоба қызметкерлері 2 ғылыми мақалаларды, соның ішінде:

* импакт-факторы бар Web of Science Q1, Scopus процентиль 83 мәліметтер базасына енгізілген халықаралық рейтингтік журналда 1 мақала (Article);
* ҚР БҒМ ҚОКСОН ұсынған қазақстандық журналда 1 мақала.

**РЕФЕРАТ**

Отчет 32 с., 34 источн., 2 прил.

ФУНКЦИЯ ГРИНА, ФУНКЦИЯ РИМАНА-ГРИНА, НЕЛОКАЛЬНАЯ КРАЕВАЯ ЗАДАЧА, ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИЙ ТРЕУГОЛЬНИК, ВОЛНОВОЕ УРАВНЕНИЕ, ДВУМЕРНОЕ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОЕ УРАВНЕНИЕ

Цель проектаобоснование метода функции Грина для несимметричных характеристических начально-краевых задач для гиперболического уравнения в характеристическом треугольнике.

Основные научные результаты отчета, полученные согласно календарного плана:

* построена функция Грина для первой начально-краевой задачи в четверти плоскости для общего двумерного гиперболического уравнения второго порядка;
* построена функция Грина для второй начально-краевой задачи в четверти плоскости для общего двумерного гиперболического уравнения второго порядка;
* построена функция Грина для несимметричных характеристических краевых задач для гиперболического уравнения общего вида, рассматриваемого в характеристическом треугольнике с краевым условием первого рода на нехарактеристической границе;
* построена функция Грина для несимметричных характеристических краевых задач для гиперболического уравнения общего вида, рассматриваемого в характеристическом треугольнике с краевым условием второго рода на нехарактеристической границе;
* построен пример корректной характеристической краевой задачи, имеющей «неклассический» вид функции Грина.

Степень выполнения поставленных в проекте задач. Все предусмотренные в календарном плане по проекту задачи выполнены, все намеченные цели достигнуты.

Научные публикации. По результатам исследований с мая 2021 года сотрудниками проекта опубликованы 2 научные статьи, в том числе:

* 1 статья (Article) в международном рейтинговом журнале, входящем в БД Web of Science Q1, Scopus процентиль 83;
* 1 статья в казахстанском журнале, рекомендованном КОКСОН МОН РК.

**СОДЕРЖАНИЕ**

[ВВЕДЕНИЕ 6](#_Toc54887669)

[ОСНОВНАЯ ЧАСТЬ ОТЧЕТА О НИР 7](#_Toc54887670)

[1 Построение функции Грина для первой начально-краевой задачи в четверти плоскости для общего двумерного гиперболического уравнения второго порядка 7](#_Toc54887671)

[2 Построение функции Грина для второй начально-краевой задачи в четверти плоскости для общего двумерного гиперболического уравнения второго порядка 11](#_Toc54887674)

[3 Построение функции Грина для несимметричных характеристических краевых задач для гиперболического уравнения общего вида, рассматриваемого в характеристическом треугольнике с краевым условием первого рода на нехарактеристической границе 14](#_Toc54887677)

[4 Построение функции Грина для несимметричных характеристических краевых задач для гиперболического уравнения общего вида, рассматриваемого в характеристическом треугольнике с краевым условием второго рода на нехарактеристической границе 18](#_Toc54887678)

[5 Построение примера корректной характеристической краевой задачи, имеющей «неклассический» вид функции Грина 22](#_Toc54887679)

[ЗАКЛЮЧЕНИЕ 25](#_Toc54887680)

[СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ 26](#_Toc54887681)

[ПРИЛОЖЕНИЕ А Список опубликованных работ 29](#_Toc54887682)

[ПРИЛОЖЕНИЕ Б](#_Toc54887683) [Календарный план работ 30](#_Toc54887684)

**ВВЕДЕНИЕ**

Содержание отчета. В этом заключительном отчете (за двенадцать месяцев проекта) изложены результаты исследований по определению и построению функций Грина краевых задач для общего гиперболического уравнения второго порядка.

Значимость проекта состоит в том, что исследуемые объекты – функции Грина для краевых задач для линейных дифференциальных операторов с локальными и нелокальными условиями – с одной стороны имеют важное значение в самой математической науке, с чисто математической точки зрения. А с другой стороны, к таким задачам имеется существенный интерес в механике, физике, биологии и других естественно-научных дисциплинах. Поэтому полученные результаты являются актуальными и будут понятны научным работникам всего мира. И могут быть ими использованы для дальнейших исследований.

Принципиальное отличие идей Проекта в том, что он посвящен исследованию функций Грина для гиперболических задач. Исследований в этом направлении проводилось совсем немного и долгое время здесь не было никаких новых продвижений. От работ других авторов прошлых лет выполненный проект отличается тем, что исследованные задачи не являются симметрическими. От собственных работ руководителя проекта заявляемый проект отличается тем, что ранее для подобных задач им рассматривались вопросы корректности и спектральных свойств, а вопросы построения функций Грина не рассматривались.

В ходе выполнения проекта использованы различные математические источники, как монографии, так и журнальные статьи [1-34]. Список использованных источников приведен в разделе в конце отчета.

В приложении А приведены списки опубликованных работ авторов отчета, а в приложении Б – календарный план на 2021 год.

**ОСНОВНАЯ ЧАСТЬ ОТЧЕТА О НИР**

1 Построение функции Грина для первой начально-краевой задачи в четверти плоскости для общего двумерного гиперболического уравнения второго порядка

По данному разделу согласно ожидаемому результату календарного плана договора, дано определение и обоснована методика построения функции Грина для первой начально-краевой задачи в четверти плоскости для общего двумерного гиперболического уравнения второго порядка.

В области рассмотрено линейное гиперболическое уравнение

(1.1)

Для общего гиперболического уравнения второго порядка (1.1) рассмотрена первая начально-краевая задача

(1.2)

(1.3)

где ; ; ; ; ; .

Несмотря на кажущуюся простоту области, оказалось, что здесь необходимо провести подробные исследования и дать точные определения.

Теорема 1.1. Пусть

. Тогда задача (1.1)-(1.3) имеет единственное регулярное решение.

Таким образом, в первую очередь нами доказана корректность рассматриваемой задачи (1.1)-(1.3) в классическом смысле.

Хорошо известно, что функция Римана-Грина не определена во всей области , а только для тех точек , которые удовлетворяют следующим условиям: . А для остальных точек области, функция Римана-Грина не определена однозначно. Для дальнейших построений нам важно использовать функцию Римана-Грина, определенную во всех точках области , в том числе и при .

Также для дальнейших рассуждений нам необходимо было ввести некоторые соотношения между коэффициентами и на границе .

Чтобы ввести функцию Римана-Грина во всех точках области , мы продолжаем коэффициенты уравнения (1.1) в область следующим образом:

(1.4)

(1.5)

(1.6)

Если коэффициенты , то из (1.4)-(1.6) коэффициенты в области имеют гладкость и удовлетворяют следующим условиям симметрии:

(1.7)

Лемма 1.1*.* Если условия (1.7) выполнены, то функция Римана-Грина уравнения (1.1) имеет следующую симметрию:

(1.8)

В данном проекте нами впервые дано определение функции Грина этой задачи.

Определение 1.1. Функцией Грина задачи (1.1)-(1.3) назовем функцию , которая при любом фиксированном , удовлетворяет однородному уравнению

(1.9)

и следующим граничным условиям:

(1.10)

(1.11)

(1.12)

и на характеристических линиях должны выполняться следующие условия: значения производных функции Грина в направлениях, параллельных этим характеристикам, должны совпадать в соседних областях; т.е.,

(1.13)

(1.14)

(1.15)

и на должно выполняться условие:

(1.16)

Теорема 1.2. Функция , которая удовлетворяет условиям (1.9)-(1.16), существует и единственна.

Для того, чтобы показать, что такая функция , которая удовлетворяет условиям (1.9)-(1.16), существует и единственна, нами выделены восемь подобластей области . Из хода доказательства данной теоремы нами получен следующие результат:

Следствие 1.1. Функция Грина задачи (1.1)-(1.3) в подобластях имеет вид:

Для того, чтобы построить функцию Грина в подобласти , мы предполагаем, что (1.7) выполнены и продолжаем коэффициенты на . Если (1.7) выполнены, то мы имеем симметрию функции Римана-Грина (1.8), и с помощью этой функции можем записать явный вид функции Грина в следующем виде:

Далее, с использованием построенной функции Грина, получено интегральное представление решения задачи (1.1)-(1.3).

Работа по данному пункту календарного плана завершена полностью. Основной результат опубликован в работе [33] в журнале «Boundary Value Problems» (Web of Science Q1, Scopus процентиль 83).

2 Построение функции Грина для второй начально-краевой задачи в четверти плоскости для общего двумерного гиперболического уравнения второго порядка

По данному разделу, согласно ожидаемому результату календарного плана договора, дано определение и обоснована методика построения функции Грина для второй начально-краевой задачи в четверти плоскости для общего двумерного гиперболического уравнения второго порядка.

В области рассмотрено линейное гиперболическое уравнение

(2.1)

Для общего гиперболического уравнения второго порядка (2.1) рассмотрена вторая начально-краевая задача

(2.2)

(2.3)

где .

Теорема 2.1. Пусть

. Тогда задача (2.1)-(2.3) имеет единственное регулярное решение.

Таким образом, также как и для первой начально-краевой задачи, в первую очередь доказана корректность рассматриваемой задачи (2.1)-(2.3) в классическом смысле.

Как и в первой задаче, для того, чтобы определить функцию Римана-Грина, определенную во всех точках области , при , используем условия (1.7).

Определение 2.1. Функцией Грина задачи (2.1)-(2.3) назовем функцию , которая при любом фиксированном , удовлетворяет однородному уравнению

(2.4)

и следующим граничным условиям:

(2.5)

(2.6)

(2.7)

и на характеристических линиях должны выполняться следующие условия: значения производных функции Грина в направлениях, параллельных этим характеристикам, должны совпадать в соседних областях; т.е.,

(2.8)

(2.9)

(2.10)

и на должно выполняться условие:

(2.11)

Теорема 2.2. Функция которая удовлетворяет условиям (2.4)-(2.11), существует и единственна.

Для того, чтобы показать, что такая функция , которая удовлетворяет условиям (2.4)-(2.11), существует и единственна, нами выделены восемь подобластей области , и в ходе доказательстве теоремы 2.2 мы получили:

Следствие 2.1. Функция Грина задачи (2.1)-(2.3) в подобластях имеет вид:

Как и в первой начально-краевой задаче, для того, чтобы построить функцию Грина в области , мы предполагаем, что (1.7) выполнены и продолжаем коэффициенты на . Если (1.7) выполнены, то мы имеем симметрию функции Римана-Грина (1.8), и с помощью этой функции можем написать явный вид функции Грина в следующем виде:

Далее, с использованием построенной функции Грина, получено интегральное представление решения задачи (2.1)-(2.3).

Работа по данному пункту календарного плана завершена полностью.

3 Построение функции Грина для несимметричных характеристических краевых задач для гиперболического уравнения общего вида, рассматриваемого в характеристическом треугольнике с краевым условием первого рода на нехарактеристической границе

По данному разделу, согласно ожидаемому результату календарного плана договора, дано определение функции Грина для несимметричных характеристических краевых задач для гиперболического уравнения общего вида, рассматриваемого в характеристическом треугольнике с краевым условием первого рода на нехарактеристической границе и дано обоснование методики её построения.

В характеристическом треугольнике рассмотрено общее гиперболическое уравнение второго порядка

(3.1)

Для уравнения (3.1) рассмотрена нелокальная краевая задача со смещением

(3.2)

где – заданная константа. На нехарактеристической линии задаётся краевое условие первого рода

(3.3)

Будем предполагать, что

При помощи представления решения задачи Коши (3.1), (3.3) методом Римана, решение задачи (3.1)-(3.3) ищем в следующем виде:

где - функция Римана-Грина уравнения (3.1).

Тогда подставляя (3.4) в (3.2), имеем:

где

Тогда уравнение (3.5) будет уравнением Фредгольма второго рода. Поэтому, если предположить, что решение задачи (3.5) единственно, то оно существует.

Тем самым доказано, что рассматриваемая задача (3.1)-(3.3) является фредгольмовой.

Определение 3.1. Функцией Грина задачи (3.1)-(3.3) назовем функцию , которая при любом фиксированном , удовлетворяет однородному уравнению

(3.6)

и следующим граничным условиям:

(3.7)

(3.8)

и на характеристических линиях должны выполняться следующие условия: значения производных функции Грина в направлениях, параллельных этим характеристикам, должны совпадать в соседних областях; т.е.,

(3.9)

(3.10)

(3.11)

(3.12)

и на должно выполняться условие:

(3.13)

Определение функциии Грина задачи (3.1)-(3.3) существенно отличается от определение функциий Грина предыдущих двух задач тем, что здесь функция Грина имеет скачки еще на двух дополнительных характеристиках.

Для того, чтобы построить функцию , которая удовлетворяет условиям (3.6)-(3.13), нами выделены шесть подобластей области . В каждой из этих подобластей функция Грина является непрерывной, но при переходе от одной области к другой непрерывность функции Грина может нарушаться.

Теорема 3.1. Если решение задачи (3.1)-(3.3) единственно, то функция , которая удовлетворяет условиям (3.6)-(3.13), существует и единственна.

Первоначально функция Грина нами построена для дифференциального выражения вида

В дальнейшем эта методика распространяется на функцию Грина для общего уравнения (3.1).

Работа по данному разделу календарного плана выполнена полностью. Основной результат при опубликован в нашей работе [34] в журнале «Вестник КазНУ. Серия математика, механика, информатика» (рекомендован КОКСОН МОН РК).

4 Построение функции Грина для несимметричных характеристических краевых задач для гиперболического уравнения общего вида, рассматриваемого в характеристическом треугольнике с краевым условием второго рода на нехарактеристической границе

По данному разделу, согласно ожидаемому результату календарного плана договора, дано определение функции Грина для несимметричных характеристических краевых задач для гиперболического уравнения общего вида, рассматриваемого в характеристическом треугольнике с краевым условием второго рода на нехарактеристической границе и дано обоснование методики её построения.

В характеристическом треугольнике рассмотрено общее гиперболическое уравнение второго порядка

(4.1)

Для уравнения (4.1) рассмотрена нелокальная краевая задача со смещением

(4.2)

где – заданная константа. На нехарактеристической линии задаётся краевое условие второго рода

(4.3)

Будем предполагать, что

Также, как и в пункте 3, при помощи представления решения задачи Коши (4.1), (4.3) методом Римана, решение задачи (4.1)-(4.3) ищем в следующем виде:

где - функция Римана-Грина уравнения (4.1). Тогда подставляя (4.4) в (4.2), получаем:

(4.5)

где

Тогда уравнение (4.5), как и в предыдущем пункте будет уравнением Фредгольма второго рода. Если предположить, что решение задачи (4.5) единственно, то оно существует.

Тем самым доказано, что рассматриваемая задача (4.1)-(4.3) является фредгольмовой.

Определение 4.1. Функцией Грина задачи (4.1)-(4.3) назовем функцию , которая при любом фиксированном , удовлетворяет однородному уравнению

(4.6)

и следующим граничным условиям:

(4.7)

(4.8)

и на характеристических линиях должны выполняться следующие условия: значения производных функции Грина в направлениях, параллельных этим характеристикам, должны совпадать в соседних областях; т.е.,

(4.9)

(4.10)

(4.11)

(4.12)

и на должно выполняться условие:

(4.13)

Как и в предыдущей задаче, для того, чтобы построить функцию которая удовлетворяет условиям (4.6)-(4.13), выделены шесть подобластей области

Теорема 4.1. Если решение задачи (4.1)-(4.3) единственно, тогда функция , которая удовлетворяет условиям (4.6)-(4.13), существует и единственна.

Первоначально функция Грина нами построена для дифференциального выражения вида

В дальнейшем эта методика распространяется на функцию Грина для общего уравнения (4.1).

Работа по данному разделу календарного плана выполнена полностью.

5 Построение примера корректной характеристической краевой задачи, имеющей «неклассический» вид функции Грина

По данному разделу, согласно ожидаемому результату календарного плана договора, построен примера корректной характеристической краевой задачи, имеющей «неклассический» вид функции Грина.

В характеристическом треугольнике рассмотрено волновое уравнение

(5.1)

Для уравнения (5.1) рассмотрена краевая задача

(5.2)

где – заданная константа. На нехарактеристической линии задаётся краевое условие первого рода

(5.3)

Несложно показать, что при задача (5.1)-(5.3) корректна.

Такая задача для случая вырождающегося гиперболического уравнения впервые была рассмотрена в работе Т.Ш. Кальменова [32].

Далее нами впервые дается определение функции Грина задачи (5.1)-(5.3).

Определение 5.1. Функцией Грина задачи (5.1)-(5.3) назовем функцию , которая при любом фиксированном , удовлетворяет однородному уравнению

(5.4)

и следующим граничным условиям:

(5.5)

(5.6)

(5.7)

(5.8)

(5.9)

(5.10)

(5.11)

(5.12)

(5.13)

(5.14)

(5.15)

(5.16)

При или :

(5.17)

При или :

(5.18)

При или :

(5.19)

Определение функции Грина задачи (5.1)-(5.3), как видно, существенно отличается от определения функций Грина всех предыдущих задач тем, что функция Грина этой задачи имеет скачки на восьми характеристиках.

Теорема 5.1. Если , тогда функция , которая удовлетворяет условиям (5.4)-(5.19), существует и единственна.

При доказательстве теоремы 5.1 выделены пятнадцать подобластей области и функция Грина ищется в следующем виде:

В итоге мы получили функцию Грина задачи (5.1)-(5.3) в явном виде и она имеет следующий вид:

Из определения 5.1 легко видеть, что функция Грина задачи (5.1)-(5.3) имеет «неклассический» вид, потому что имеет разрывы на восьми характеристиках.

Работа по данному разделу календарного плана выполнена полностью.

**ЗАКЛЮЧЕНИЕ**

Таким образом, в этом заключительном отчете за двенадцать месяцев проекта изложены результаты исследований функции Грина краевых задач для общего гиперболического уравнения второго порядка.

Центральным результатом отчета является обоснование метода функции Грина для несимметричных характеристических начально-краевых задач для гиперболического уравнения в характеристическом треугольнике. Основным достижением отчета является выявление нового эффекта: в отличие от функций Грина эллиптических и параболических задач, если для задач для уравнений эллиптического и параболического типа функция Грина может быть представлена в виде суммы «главной части с особенностью» и «гладкого слагаемого» то для гиперболических краевых задач это уже не так. Функция может иметь особенности и разрывы в гораздо большем количестве, чем «главная часть» . Этот факт существенно усложняет рассмотрение и поэтому для каждого отдельного случая краевых задач требуется отдельное исследование.

Степень новизны полученных результатов. Все приведенные в отчете научные результаты являются новыми.

Степень выполнения поставленных в проекте задач. Все, предусмотренные в календарном плане по проекту задачи, выполнены, все намеченные цели достигнуты.

Завершенность результатов. Сформулированные и приведенные в отчете результаты являются полностью доказанными. Подтверждением завершенности результатов проекта является то, что результаты исследований опубликованы в зарубежном рецензируемом научном журнале, индексируемом в Web of Science Clarivate Analytics и Scopus.

Научные публикации. По результатам исследований с мая 2021 года сотрудниками проекта опубликованы 2 научные статьи, в том числе:

* 1 статья (Article) в международном рейтинговом журнале, входящем в БД Web of Science Clarivate Analytics и БД Scopus с импакт-фактором;
* 1 статья в казахстанском журнале, рекомендованном КОКСОН МОН РК.

**СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ**

1. Green G. An essay on the application of mathematical analysis to the theories of electricity and magnetism. – 1828. – Nottingham. Printed for the author, by T. Wheelhouse.
2. Kreith K. Sturmian theorems for hyperbolic equations // Proc. Amer. Math. Soc. – 1969. – Vol. 22. – P. 277-281.
3. Kreith K. A Sturm theorem for partial differential equations of mixed type // Proc. Amer. Math. Soc. – 1981. – Vol. 81. – P. 75-78.
4. Kreith K. A class of comparison theorems for nonlinear hyperbolic initial value problems // Proc. Roy. Soc. Edinburgh, Sec. A. – 1981. – Vol. 87. – P. 190-191.
5. Swanson C. A. A dichotomy of PDE Sturmian theory // SIAM Review. – 1978. – Vol. 20. – P. 285-300.
6. Kalmenov T.Sh. On the Spectrum of a Self-Adjoint Problem for the Wave Equation // Vestnik Akad. Nauk. Kazakh. SSR. – 1982. – Vol. 2. - P. 63-66.
7. Kalmenov T.Sh. Spectrum of a boundary-value problem with translation for the wave equation // Differential equations. – 1983. - Vol. 19, No. 1. - P. 64 - 66.
8. Kreith K. A class of hyperbolic focal point problems // Hiroshima Mathematical Journal. – 1984. – Vol. 14. – P. 203-210.
9. Krasnoselskii M.A. Positive Solutions of Operator Equations // Groningen: P. Noordhoff Ltd. - 1964.
10. Kreith K. Symmetric Green’s functions for a class of CIV boundary value problems // Canad. Math. Bull. – 1988. – Vol. 31. – P. 272-279.
11. Kreith K. Establishing hyperbolic Green’s functions via Leibniz’s rule // SIAM Rev. – 1991. – Vol. 33. – P. 101-105.
12. Kreith K. A self-adjoint problem for the wave equation in higher dimensions // Comput. Math. Appl. – 1991. – Vol. 21. – P. 129-132.
13. Kreith K. Mixed selfadjoint boundary conditions for the wave equation // Differential equations and its applications (Budapest), Colloq. Math. Soc. Janos Bolyai, 62, North-Holland, Amsterdam. – 1991. – P. 219–226.
14. Iraniparast N. A method of solving a class of CIV boundary value problems // Canad. Math. Bull. – 1992. – Vol. 35, No. 3. – P. 371–375.
15. Iraniparast N. A boundary value problem for the wave equation // Int. J. Math. Math. Sci. – 1999. – Vol. 22, No. 4. – P. 835–845.
16. Iraniparast N. A CIV boundary value problem for the wave equation // Appl. Anal. – 2000. – Vol. 76, No. 3-4. – P. 261–271.
17. Haws L. Symmetric Green’s functions for certain hyperbolic problems // Comput. Math. Appl. – 1991. – Vol. 21, No. 5. – P. 65–78.
18. Iraniparast N. Boundary value problems for a two-dimensional wave equation // Journal of Computational and Applied Mathematics. – 1994. – Vol. 55. – P. 349-356.
19. Iraniparast N. A selfadjoint hyperbolic boundary-value problem // Electronic Journal of Differential Equations, Conference. - 2003. – Vol. 10. - P. 153–161.
20. Sadybekov M.A. On the conjugate Darboux problem // Doklady Akademii Nauk. – 1990. – Vol. 314, No. 2. – P. 304–306.
21. Kal'menov T.Sh., Sadybekov M.A. The Dirichlet problem and nonlocal boundary value problems for the wave equation // Differential Equations. – 1990. – Vol. 26, No. 1. – P. 55–59.
22. Sadybekov M.A. The boundary-value problem of a new-type for a wave-equation // Doklady Akademii Nauk. – 1994. – Vol. 336, No. 5. – P. 590–591.
23. Sadybekov M.A., Yessirkegenov N.A. Boundary-value problems for wave equations with data on the whole boundary // Electronic Journal of Differential Equations. – 2016. – Vol. 281. –9 pp.
24. Sadybekov M.A., Orynbasarov E.M. Baseness of the system of the eigenfunctions and associated functions with displacement of Lavrentev-Bitsadze equation // Doklady Akademii Nauk. – 1992. – Vol. 324, No. 6. – P. 1152–1154.
25. Orynbasarov E.M., Sadybekov M.A. The basis property of the system of eigen- and associated functions of a boundary value problem with shift for the wave equation // Math. Notes. – 1992. – Vol. 51, No. 5. – P. 482–484.
26. Yessirkegenov N.A., Sadybekov M.A. Spectral properties of boundary-value problem with a shift for wave equation // Russian Math. (Iz. VUZ). – 2016. – Vol. 60, No. 3. – P. 41–46.
27. Sadybekov M.A., Turmetov B.Kh., Torebek B.T. Solvability of nonlocal boundary-value problems for the Laplace equation in the ball // Electronic Journal of Differential Equations. – 2014. – Vol. 157. –14 p.
28. Sadybekov M.A., Turmetov B.Kh., Torebek B.T. On an explicit form of the Green function of the Robin problem for the Laplace operator in a circle // Adv. Pure Appl. Math. – 2015. – Vol. 6, No. 3. – P. 163–172.
29. Sadybekov M.A., Torebek B.T., Turmetov B.Kh. Representation of Green’s function of the Neumann problem for a multi-dimensional ball // Complex Variables and Elliptic Equations. – 2016. – Vol. 61, No. 1.
30. Sadybekov M.A., Torebek B.T., Turmetov B.Kh. Construction of Green’s function of the Neumann problem in a ball // Eurasian Math. J. – 2016. – Vol. 7, No. 2. – P. 100–105.
31. Sadybekov M.A., Torebek B.T., Turmetov B.Kh. Representation of the Green's function of the exterior Neumann problem for the Laplace operator // Siberian Math. J. – 2017. – Vol. 58, No. 1. – P. 153–158.
32. Кальменов Т.Ш., Бияров Б.Н. О нелокальной вольтерровой задаче для гиперболического уравнения // Известия АН КазССР Сер. физ.-мат. – 1988, No. 3.
33. Sadybekov M.A., Derbissaly B.O. On Green’s function of Cauchy–Dirichlet problem for hyperbolic equation in a quarter plane // Boundary Value Problems. – 2021. – Vol. 69, 23 p.
34. Derbissaly B.O., Sadybekov M.A. On Green’s function of Darboux problem for hyperbolic equation // Вестник КазНУ. Серия математика, механика, информатика. – 2021. – Т. 111, № 3. – С. 79-94.

**ПРИЛОЖЕНИЕ А**

**Список опубликованных работ**

По результатам исследований с мая 2021 года опубликованы 2 научные статьи, в том числе:

* *1 статья (Article) в международном рейтинговом журнале, входящем в БД Web of Science Clarivate Analytics и БД Scopus с импакт-фактором*;
* 1 статья в казахстанском журнале, рекомендованном КОКСОН МОН РК.

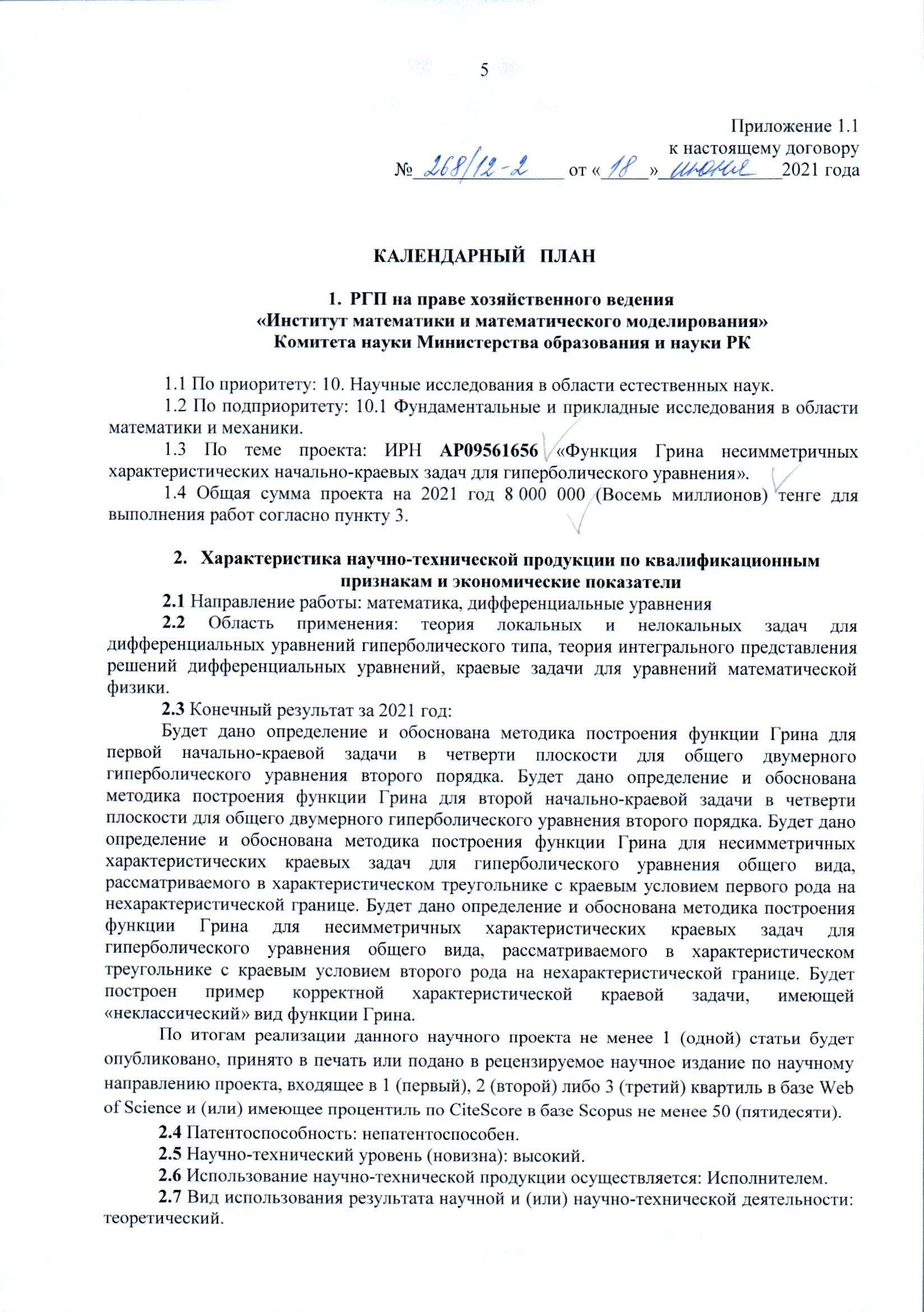
1 статья в международном рейтинговом журнале (входящем в БД Web of Science Clarivate Analytics и/или БД Scopus) с импакт-фактором:

1. Sadybekov M.A., Derbissaly B.O. On Green’s function of Cauchy–Dirichlet problem for hyperbolic equation in a quarter plane // Boundary Value Problems. – 2021. – V. 69, 23 pp., Web of Science Q1, Scopus процентиль 83.

1 статья в журнале, рекомендованном КОКСОН МОН РК:

2 Derbissaly B.O., Sadybekov M.A. On Green’s function of Darboux problem for hyperbolic equation // Вестник КазНУ. Серия математика, механика, информатика. – 2021. – Т. 111, № 3. – С. 79-94.

**ПРИЛОЖЕНИЕ Б**

**Календарный план работ**

